
Mathematische Homogenisierung in der Kontinuumsmechanik

Homogenisierung von klassischen hyperelastischen sowie mikropolaren linear-elastischen Materialien mit periodischer Mikrostruktur vermöge der mathematischen Zweiskalenkonvergenz und anschließende Implementierung des homogenisierten hyperelastischen Modells in eine Finite-Elemente-Umgebung.

Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation von Dipl.-Math. Matthias Sanden aus Offenbach am Main
August 2013 — Darmstadt — D 17



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Bauingenieurwesen und
Geodäsie
Arbeitsgruppe Kontinuumsmechanik

Mathematische Homogenisierung in der Kontinuumsmechanik

Homogenisierung von klassischen hyperelastischen sowie mikropolaren linear-elastischen Materialien mit periodischer Mikrostruktur vermöge der mathematischen Zweiskalenkonvergenz und anschließende Implementierung des homogenisierten hyperelastischen Modells in eine Finite-Elemente-Umgebung.

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Math. Matthias Sanden aus Offenbach am Main

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis

2. Gutachten: Prof. Dr. Dr. h.c. Hans-Dieter Alber

Tag der Einreichung: 4. Juni 2013

Tag der Prüfung: 27. August 2013

Darmstadt — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-35956

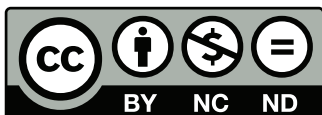
URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/3595>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 2.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung und Abstract	3
1.1	Kurzfassung	4
1.2	Abstract	4
2	Einleitung	5
2.1	Homogenisierung in der Kontinuumsmechanik	6
2.2	Wichtige Homogenisierungstechniken im Überblick	9
3	Mathematische Vorbereitung	15
3.1	Allgemeine Definitionen und Sätze	16
3.2	Modellierung der periodischen Mikrostruktur in mathematischen Homogenisierungstheorien	22
4	Methode der asymptotischen Entwicklung für klassische Kontinua	25
4.1	Asymptotische Entwicklung für lineare Elastizität	26
4.2	Asymptotische Entwicklung für Elasto-Viskoplastizität und kleine Deformationen	35
5	Methode der Zweiskalenkonvergenz für klassische Kontinua	41
5.1	Übersicht, Sätze und Definitionen	42
5.2	Energievariation des periodischen hyperelastischen Problems	51
5.3	Über die Zerlegung zweiskaliger Variationsgleichungen	58
5.4	Anwendung der Zweiskalenkonvergenz – Gleichungen (5.36) - (5.40)	59
5.4.1	Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.36)	59
5.4.2	Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.37)	62
5.4.3	Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.38)	65
5.4.4	Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.39)	66
5.4.5	Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.40)	66
5.4.6	Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse	67
5.5	Kontinuumsmechanische Konsistenz der zweiskaligen Kinematik und Hills Bedingung	69
5.6	Anwendung der Zweiskalenkonvergenz – Gleichung (5.41)	71
5.6.1	Einschränkung auf linearisierte isotrope St. Venant-Kirchhoff-Materialien	71
5.6.2	Isotrope kompressible Neo-Hooke-Materialien für große Deformationen	77

6	Methode der Zweiskalenkonvergenz für mikropolare Kontinua	83
6.1	Grundgleichungen der mikropolaren Elastizität und deren lineare Darstellung im isotropen Fall	84
6.2	Anwendung der Zweiskalenkonvergenz	87
7	Numerische Simulationen für isotrope kompressible Neo-Hooke-Elastizität unter großen Deformationen	95
7.1	Finite-Elemente-Formulierung des einskaligen Modells	96
7.2	Numerisches Schema des homogenisierten Problems	100
7.3	Finite-Elemente-Formulierung des mikroskopischen Problems	101
7.4	Validierung des mikroskopischen Problems anhand homogener Materialien	111
7.5	Finite-Elemente-Formulierung des makroskopischen Problems	118
7.6	Validierung des homogenisierten Modells durch Vergleich mit fein-vernetzten einskaligen Simulationen	127
7.6.1	Simulierter Scherversuch in X_2 -Richtung	129
7.6.2	Simulierter axialer Zugversuch in X_2 -Richtung	138
7.6.3	Simulierter axialer Zugversuch in X_3 -Richtung	139
7.6.4	Simulierter Torsionsversuch um die X_3 -Achse	141
8	Zusammenfassung und Ausblick	145
8.1	Zusammenfassung	146
8.2	Ausblick	147
9	Akademischer Lebenslauf des Autors	149
	Literaturverzeichnis	151

1 Kurzfassung und Abstract

1.1 Kurzfassung

In dieser Arbeit wird für Materialien, welche über eine feine hyperelastische inhomogene periodische Mikrostruktur verfügen, ein homogenisiertes Ersatzproblem für den Fall großer Deformationen hergeleitet. Ausgehend vom mathematischen Begriff der Zweiskalenkonvergenz werden die Gleichungen der Hyperelastizität einem Grenzwertprozeß unterworfen, welcher unter geeigneten Annahmen zu einem mikroskopischen und einem makroskopischen Problem führt. Diese beiden Probleme stellen gemeinsam das homogenisierte Problem dar. Mit denselben Techniken werden die Gleichungen der linearen isotropen mikropolaren Elastizität homogenisiert.

Finite-Elemente-Simulationen zeigen für ein nichtlineares isotropes kompressibles hyperelastisches Zweischichtenmaterial, daß das homogenisierte Problem im Rahmen von Scher-, Zug- und Torsionsversuchen hinreichend genaue Ergebnisse liefert. Bei diesen Rechnungen wurden die homogenisierten Ergebnisse mit denjenigen klassischer einskaliger, fein-vernetzter Referenzrechnungen verglichen.

1.2 Abstract

This work is about a homogenization technique for nonlinear hyperelasticity that is based on the mathematical theory of the so-called two-scale convergence. The proposed method is valid for materials that contain a fine periodic inhomogeneous microstructure. Starting from the equations of nonlinear hyperelasticity, the use of the two-scale convergence leads – via a limiting process and under proper assumptions – to a microscopic and a macroscopic problem. These two problems represent the desired homogenized material. In the same way, the equations of linear isotropic micropolar elasticity are homogenized.

Considering a nonlinear isotropic compressible hyperelastic two-layered material, finite element computations are presented for shearing, tension and torsion deformations. The numerical results of the homogenized problem are in good agreement with the results of a classical one-scale computation that serves as a reference.

2 Einleitung

2.1 Homogenisierung in der Kontinuumsmechanik

In der Kontinuumsmechanik kann mit *Homogenisierung* der Versuch bezeichnet werden, ein kompliziert strukturiertes Material durch ein spezielles Modell zu beschreiben, welches diese komplexe Struktur stark vereinfacht abbildet und dennoch zu einem plausiblen Deformationsverhalten für die untersuchten Belastungsfälle führt.

Im Vergleich zum betrachteten Gesamtkörper sind die in dessen Material vorliegenden *Inhomogenitäten*, welche die Ursache einer heterogenen Materialstruktur sind, in der Regel sehr klein, so daß das gemeinsame Beobachten des Gesamtkörpers und der einzelnen Komponenten der feinen Materialstruktur schwer zu realisieren ist. Dies wird vor allem im Hinblick auf computergestützte Simulationen deutlich. Denn um die feinen strukturellen Unterschiede im Material hinreichend genau abbilden zu können, muß die Gesamtgeometrie extrem fein vernetzt werden. Bei großen Körpern mit detaillierten Materialstrukturen führt dies zu einer enormen Anzahl an Freiheitsgraden, welche von heutigen Computern ab einem gewissen Grad kaum bewältigt werden kann. Das Problem einer komplexen inhomogenen Materialstruktur liegt demnach vor allem im numerischen Aufwand, welcher bei einer computergestützten Simulation geleistet werden muß.

Trotzdem macht der Anspruch einer hinreichend genauen Materialmodellierung die fundierte Betrachtung der vorhandenen Materialstruktur notwendig. Um den unterschiedlichen Größenordnungen gerecht zu werden, wird die anfangs verwendete einheitliche Größenskala in verschiedene Teilskalen aufgespalten. Im Rahmen der Homogenisierung sind dies normalerweise die *makroskopische* Skala, welche den Gesamtkörper mißt, sowie die *mikroskopische* Skala, in welcher die inhomogene Mikrostruktur beschrieben wird. Manche Arbeiten verwenden für eine feinere Unterteilung eine dritte Skala: Auf der sogenannten *mesoskopischen* Ebene sind einzelne Inhomogenitäten zu solchen Einheiten zusammengefaßt, welche im Vergleich zur makroskopischen Skala immer noch verschwindend klein, im Vergleich zur mikroskopischen jedoch bereits hinreichend groß sind.

Jeder Homogenisierungsmethode liegt nun der Gedanke zugrunde, den Gesamtkörper makroskopisch als homogen anzusehen, wodurch eine gröbere Vernetzung der Geometrie und damit eine Reduzierung der Freiheitsgrade möglich ist. Inwiefern dieser homogene Ersatzkörper durch die ursprüngliche inhomogene Mikrostruktur beeinflusst wird, hängt von der jeweils verwendeten Homogenisierungstechnik ab. Die Untersuchung dieser durchaus vielfältigen Techniken auf Anwendbarkeit und Güte stellt den Kern der meisten bisherigen Forschungsaktivitäten dar und wird sicherlich auch weiterhin im Fokus stehen. Die Gesamtheit aller Homogenisierungstechniken kann grob in die drei Kategorien

- Mikromechanische Homogenisierung
- Numerische Homogenisierung
- Mathematische Homogenisierung

eingeteilt werden. Daneben ist eine materialbezogene Unterscheidung in *periodische* und *nicht-periodische* Mikrostrukturen sinnvoll, da sich in der Homogenisierung sowohl allgemeine als auch speziell auf periodische Strukturen ausgerichtete Theorien entwickelt haben. Ein Material heißt periodisch, wenn sich seine Mikrostruktur aus der systematischen Wiederholung eines bestimmten Musters zusammensetzt. So dürfen beispielsweise industriell gefertigte Lamine periodisch modelliert werden. Für viele natürlich gewachsene Polykristalle ist dies jedoch oftmals nicht möglich, da sich im allgemeinen kein charakteristisches periodisches Kornmuster erkennen läßt, sie also nicht periodisch strukturiert sind.

In Abbildung 2.1 sind für den Querschnitt eines Doppel-T-Trägers drei unterschiedliche Mikrostrukturen schematisch dargestellt. Dabei steht L für die charakteristische Länge der makroskopischen Ebene, welche in diesem Beispiel die Ausmaße des gesamten Körpers widerspiegelt. Die charakteristische mikroskopische Länge l soll für die erste Mikrostruktur den durchschnittlichen Durchmesser aller Einschlüsse, für die zweite die durchschnittliche Korngröße im Aggregat und für die dritte Mikrostruktur die vorliegende Periode beschreiben. Dabei wird eine klare Trennung von mikroskopischer und makroskopischer Ebene durch die Annahme $L \gg l$ garantiert.

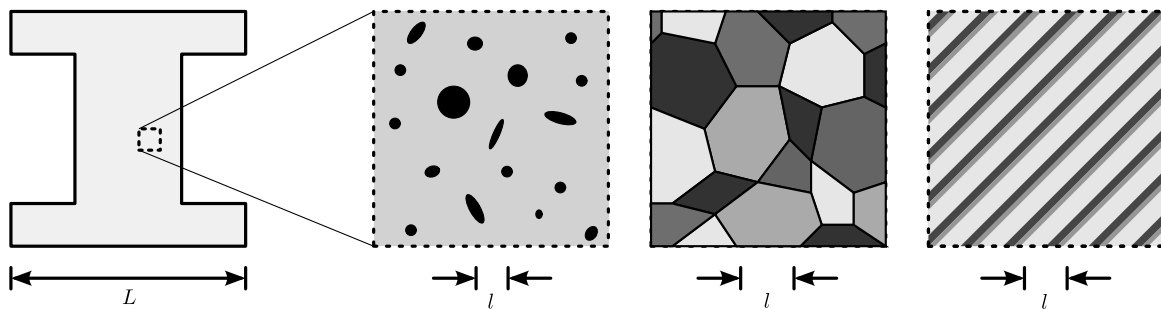


Abbildung 2.1: Makroskopischer Körper mit drei möglichen Mikrostrukturen: Matrixmaterial mit ellipsoiden Einschlüssen, polykristallines Aggregat und periodisches Laminat

Die zusätzliche Unterscheidung zwischen periodischen und allgemeinen Homogenisierungstheorien liegt vor allem darin begründet, daß sich mit den periodischen Methoden nicht-periodische Materialien zunächst nicht beschreiben lassen. Dies gilt auch für die in dieser Arbeit behandelte Zweiskalenkonvergenz, welche zu einer Homogenisierungsmethode für den periodischen Fall führen wird. Es gibt aber numerische Verfahren, welche bei einer vorgegebenen nichtperiodischen Mikrostruktur eine periodische Ersatzstruktur berechnen [8, 76]. Dabei wird vor allem auf eine möglichst geringe statistische Abweichung des simulierten Materialverhaltens geachtet. Demnach lassen sich nichtperiodische Materialien unter Inkaufnahme eines bestimmten, vom nichtperiodischen Material und vom gewählten Verfahren abhängigen Fehlers mit periodischen Theorien behandeln.

Zusätzlich zur konkreten Mikrostruktur beeinflusst das gewählte Materialmodell den Homogenisierungsprozeß maßgeblich. Ob linear-elastisch oder viskoelastisch-viskoplastisch, ob isotrop

oder anisotrop, ob elastische Matrix mit plastischen Einschlüssen oder aber Aussparungen – es gibt keine Homogenisierungstechnik, die für jedes Materialmodell gleich gute Ergebnisse liefert.

Aufbau der Arbeit

Der nächste Abschnitt stellt die oben angesprochenen Homogenisierungskategorien genauer vor. In Kapitel 3 sind die für die mathematische Homogenisierung grundlegenden Funktionenräume, Begriffe und Sätze zusammengefaßt. Außerdem wird die mathematische Modellierung einer periodischen Mikrostruktur erläutert. Kapitel 4 dient der Darstellung der asymptotischen Entwicklungsmethode für den klassischen linear-elastischen und den elaborierten elastisch-plastischen Fall. Kapitel 5 widmet sich dem theoretischen Kern dieser Arbeit für klassische Kontinua. Dort wird der Begriff der Zweiskalenkonvergenz eingeführt und seine Anwendbarkeit auf nichtlineare Hyperelastizität diskutiert. Die in Kapitel 5 erlernten Techniken finden in Kapitel 6 Anwendung auf isotrope lineare mikropolare Elastizität. Anschließend wird in Kapitel 7 die Finite-Elemente-Formulierung des homogenisierten Modells für die klassische Hyperelastizität hergeleitet und anhand dreidimensionaler Scher-, Zug- und Torsionsversuche für ein periodisches Zweischichtenmaterial getestet und mit den Ergebnissen von fein-vernetzten einskaligen Rechnungen verglichen. Kapitel 8 faßt die in dieser Arbeit gewonnen Erkenntnisse zusammen.

Der Leser sollte über Grundkenntnisse der Kontinuumsmechanik, Tensorrechnung, Funktionalanalysis, Variationsrechnung und numerischen Mathematik verfügen. Sofern dies nicht anders angedeutet ist, wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Die übrige Notation wird aus dem jeweiligen Sachverhalt deutlich.

2.2 Wichtige Homogenisierungstechniken im Überblick

In diesem Abschnitt werden diejenigen Grundbegriffe knapp erläutert, welche beim umfassenden Studium von Homogenisierungstheorien häufig benutzt werden. Obwohl manche dieser Begriffe für die mathematische Homogenisierung unter Verwendung der Zweiskalenkonvergenz weniger von Belang sind, ist deren Kenntnis für das Gesamtverständnis von Bedeutung.

Grundbegriffe

REPRÄSENTATIVES VOLUMENELEMENT. Den allermeisten Homogenisierungstheorien ist das Konzept eines *repräsentativen Volumenelements (RVE)* gemeinsam. Das RVE stellt einen im Vergleich zur tatsächlichen Mikrostruktur erheblich verkleinerten mikroskopischen Ersatzkörper dar, welcher trotzdem alle relevanten Inhomogenitäten beinhalten und damit die komplexe Mikrostruktur des Ausgangsmaterials bestmöglich repräsentieren soll. In Abbildung 2.2 ist dieser Sachverhalt angedeutet. Für Materialien mit periodischer Mikrostruktur wird das RVE nach entsprechender Normierung auch als *Referenzeinheit* bezeichnet. Jedem makroskopischen Punkt des be-

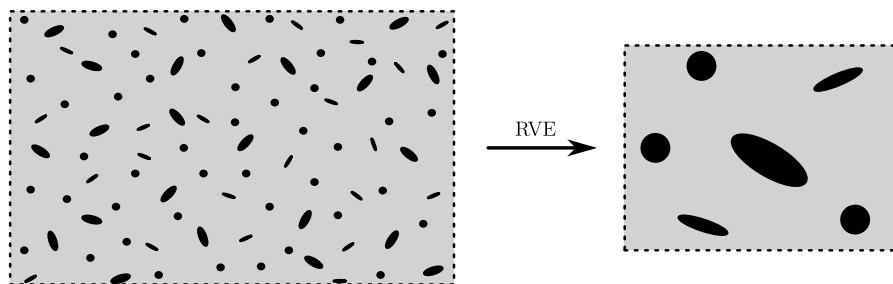


Abbildung 2.2: Übergang von der Mikrostruktur zu einem repräsentativen Volumenelement

trachteten Körpers wird das RVE als Repräsentant der ursprünglichen Mikrostruktur angeheftet. Es ist möglich, verschiedenen makroskopischen Bereichen unterschiedliche RVEs zuzuweisen. Ausgehend von den Berechnungen auf dem RVE wird das gesuchte makroskopische Ergebnis für den aktuellen makroskopischen Punkt im allgemeinen mithilfe von Volumenmittlungen über dem RVE gewonnen. Eine umfassende Behandlung von Volumenmittelungstechniken befindet sich in [64]. Deshalb muß die verwendete Homogenisierungstechnik vor allem klären, wie auf dem RVE gerechnet und wie die aktuelle makroskopische Deformation dem RVE auferlegt werden soll.

EFFEKTIVER MODULUS. Der Begriff des *effektiven Modulus* beziehungsweise *effektiven Steifigkeitstensors*, welcher ursprünglich aus der linearen Elastizitätstheorie stammt, bezeichnet bei einem heterogenen Material denjenigen Tensor vierter Stufe, welcher die volumengemittelte Verzerung des Materials auf die volumengemittelte Spannung abbildet. Damit können effektive Moduli ganz allgemein mit dem Materialmodell des homogenisierten makroskopischen Körpers identifiziert werden. Die tatsächliche Berechnung effektiver Moduli hängt stark von der verwendeten Homogenisierungstechnik und dem zugrunde liegenden Materialverhalten ab. So ist

beispielsweise der effektive Modulus eines heterogenen linear-elastischen Materials für jeden makroskopischen Punkt gleich, wohingegen ein heterogenes nichtlineares Material eine punktweise Berechnung desselben erfordert, da der effektive Modulus in diesem Fall von Ort zu Ort variieren kann. Homogenisierung bedeutet demnach nicht, daß das gewonnene Ersatzmaterial räumlich konstante Eigenschaften besitzen muß. Im umgekehrten Fall bildet der *effektive Nachgiebigkeitstensor* die volumengemittelte Spannung auf die volumengemittelte Verzerrung ab.

SCHRANKEN FÜR EFFEKTIVE MODULI. Neben den Homogenisierungsmethoden, welche für das betrachtete Problem konkrete effektive Moduli liefern, existieren auch wissenschaftliche Arbeiten zu oberen und unteren Schranken, zwischen denen sich diese Moduli bewegen dürfen. Die *Reuss-Schranke* stellt unter der Annahme, daß innerhalb des Aggregats eine konstante Spannung vorherrscht, eine untere Schranke dar [73]. Die gegensätzliche Annahme einer konstanten Verzerrung führt zur *Voigt-Schranke* als oberer Grenze [83]. Mithilfe der Variationsrechnung können die sogenannten *Hashin-Shtrikman-Schranken* hergeleitet werden, welche den relativ großen Reuss-Voigt-Gültigkeitsbereich schärfer eingrenzen [38, 39].

KONZENTRATIONSTENSOREN. Konzentrationstensoren finden bei mikromechanischen Homogenisierungstheorien ihre Verwendung. Sie bilden eine über das gesamte inhomogene Material volumengemittelte Größe auf den Volumenmittelwert einer einzelnen Inhomogenität ab. Demnach kann ein heterogener Körper genauso viele Konzentrationstensoren pro Bezugsgröße wie Inhomogenitäten besitzen. In der Praxis werden vor allem Verzerrungs- und Spannungskonzentrationstensoren verwendet.

HILLS BEDINGUNG. Bei der Untersuchung von elastischen Polykristallen hat Hill gezeigt, daß sich der Volumenmittelwert der mikroskopischen Verzerrungsenergiedichte aus den Volumenmittelwerten der mikroskopischen Spannung und der mikroskopischen Verzerrung berechnen läßt, sofern bei der Mittelwertbildung ein hinreichend großes Volumen zugrunde gelegt worden ist [40]. Genauer ist der Volumenmittelwert des Produkts *Spannung mal Verzerrung* identisch mit dem Produkt *gemittelte Spannung mal gemittelte Verzerrung*. Hills Bedingung wird bei den meisten mikromechanischen und numerischen Homogenisierungsmethoden als erfüllt vorausgesetzt und dient dort als wichtiges Hilfsmittel zur Formulierung der jeweiligen Methode.

MIKROSKOPISCHE FLUKTUATION. Der Begriff der mikroskopischen Fluktuation findet bei numerischen und mathematischen Homogenisierungsmethoden Verwendung. Auf das Verschiebungsfeld bezogen bezeichnet er die rein mikroskopischen Verschiebungen des RVEs, welche bei der Volumenmittelung den Wert Null ergeben und damit makroskopisch nicht mehr direkt sichtbar sind. Allerdings beeinflußt die mikroskopische Fluktuation die mikroskopische Spannungsverteilung des RVEs und damit implizit die aus der Volumenmittelung resultierenden makroskopischen Größen.

ESHELBY'S PROBLEM. Als grundsteinlegend für viele mikromechanische Homogenisierungsmethoden gilt Eshelbys *Transformationsproblem*, welches der englische Forscher John Douglas Eshelby in den späten 50er Jahren des letzten Jahrhunderts formuliert und gelöst hat [29, 30]. Er betrachtet darin ein unendlich ausgedehntes isotropes elastisches Medium, in dem sich ein einzelner ellipsenförmiger Einschuß befindet. Dieser Einschuß wird einer sogenannten *Eigenver-*

zerrung unterworfen. Man denke dabei an eine Kerze, welche unter das (noch) verzerrungsfreie Medium gehalten wird. Die entscheidende Frage dabei ist, wie die resultierende Gesamtverzerrung des Einschlusses nach der Interaktion mit dem umliegenden Medium aussieht. Eshelby fand heraus, daß eine räumlich konstante Eigenverzerrung bei ellipsoiden Einschlüssen zu einer räumlich konstanten Gesamtverzerrung im Einschluß führt. Genauer bildet der in [29] hergeleitete *Eshelby-Tensor* die vorliegende Eigenverzerrung auf die gesuchte Gesamtverzerrung im Einschluß ab. Der Eshelby-Tensor ist dabei eine rein geometrische Größe, die nur von der Form aber nicht von der Größe des Einschlusses abhängt. Eng verknüpft mit dem eben beschriebenen Sachverhalt ist das in der gleichen Veröffentlichung behandelte *Inhomogenitätsproblem*. In diesem Fall besitzt der Einschluß keine Eigenverzerrung, sondern ein vom Medium unterschiedliches elastisches Materialverhalten. Wird das Medium am (unendlich weit entfernten) Rand belastet, so führen räumlich konstante Randspannungen innerhalb des ellipsoiden Einschlusses zu räumlich konstanten Dehnungen und räumlich konstante Randdehnungen nach demselben Prinzip zu räumlich konstanten inneren Spannungen. In [50] und [84] versuchen die Autoren zu einer geschlossenen Formulierung der Lösung für einen kreisrunden Einschluß in einem endlich ausgedehnten Medium zu kommen. Eine Diskussion für isotrope viskoplastische Materialien wird in [62] geführt.

Mikromechanische Homogenisierung

Das Gebiet der mikromechanischen Homogenisierung wird seit mehr als 60 Jahren intensiv bearbeitet, weswegen sich mit der Zeit Methoden für die vielfältigsten Anwendungen entwickelt haben. Die drei im Anschluß vorgestellten Konzepte gehören zu den grundlegendsten ihrer Art. Ihnen ist der Bezug zum Eshelby-Problem gemeinsam. Genauer verwenden sie den Eshelby-Tensor zur Bestimmung von Konzentrationstensoren, mit deren Hilfe wiederum effektive Moduli formuliert werden können. Aufgrund der Verwendung des Eshelby-Tensors berücksichtigen sie jedoch nur die Form der Inhomogenitäten, nicht aber deren Größe und räumliche Verteilung im Material. Damit beschränkt sich die Anwendbarkeit der hier vorgestellten mikromechanischen Homogenisierungsmethoden auf Materialien mit einer relativ gleichmäßigen Mikrostruktur. Weitere Methoden sowie eine tiefergehende Behandlung der hier vorgestellten mikromechanischen Theorien befinden sich unter anderem in den gut lesbaren Monografien [72] und [88]. In [70] werden gängige mikromechanische Methoden für Materialien mit gleichmäßiger Mikrostruktur verglichen.

ESHELBY-METHODE. Die Eshelby-Methode baut direkt auf der Lösung des Eshelbys Problems auf und wird bei Kompositen angewendet, bei denen Wechselwirkungen zwischen einzelnen Inhomogenitäten vernachlässigt werden können. Diese Annahme ist bei Materialien mit ellipsenförmigen Inhomogenitäten genau dann zutreffend, wenn sie im zugrunde liegenden Matrixmaterial spärlich und weit voneinander entfernt verteilt sind. In diesem Fall ist das repräsentative Volumenelement genauso spärlich mit Inhomogenitäten durchsetzt. Jede Inhomogenität des RVEs wird nacheinander isoliert als die einzelne Inhomogenität des Eshelby-Problems betrachtet. Das unendlich ausgedehnte Medium bekommt dabei die elastischen Eigenschaften des zugrunde liegenden Matrixmaterials zugewiesen und wird am unendlich weit entfernten Rand durch die

vorgegebene Anfangsverzerrung belastet. Mithilfe des Eshelby-Tensors sowie den Steifig- und Nachgiebigkeiten der einzelnen Materialkomponenten kann der effektive Modulus bestimmt werden. Für kreisrunde Inhomogenitäten in einem kreisrunden RVE wird die Methode leicht modifiziert in [51] und [52] diskutiert.

MORI-TANAKA-SCHEMA. Im Unterschied zur Eshelby-Methode wird am unendlich weit entfernten Rand des Mediums nicht mehr die vorgegebene Anfangsbelastung auferlegt, sondern die volumengemittelte Verzerrung des Matrixmaterials. Damit sind bei diesem Verfahren Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Inhomogenitäten implizit enthalten. Ansonsten bleibt das Vorgehen der Eshelby-Methode unverändert. Zur Bestimmung des effektiven Modulus sind bei geänderter Gesamtformel dieselben Eingabegrößen erforderlich. Das Mori-Tanaka-Schema kann aufgrund der impliziten Wechselwirkungen auch für solche Materialien angewendet werden, deren ellipsoide Inhomogenitäten in höheren Konzentrationen und damit dichter im Matrixmaterial verteilt sind. Kreisrunde Einschlüsse in einem kreisrunden RVE werden für das Mori-Tanaka-Schema in [52] diskutiert. Eine modifizierte Version für elastisch-viskoplastisches Materialverhalten steht in [55].

SELBSTKONSISTENTE METHODE. Die selbstkonsistente Methode baut genauso wie das Mori-Tanaka-Schema auf der Eshelby-Methode auf. Es werden im Bezug zum Eshelby-Problem jedoch zwei Größen modifiziert. Zum einen soll das Materialverhalten des unendlich ausgedehnten Mediums durch den noch unbekannten effektiven Steifigkeitstensor beschrieben werden. Zum anderen soll am unendlich weit entfernten Rand die volumengemittelte Verzerrung des gesamten Körpers angreifen. Gemäß des selbstkonsistenten Ansatzes läßt sich der effektive Modulus nur implizit gewinnen, wodurch die numerische Behandlung im Vergleich zur Eshelby-Methode oder zum Mori-Tanaka-Schema aufwendiger ausfällt. Selbstkonsistente Methoden haben sich vor allem für die Beschreibung von Polykristallen bewährt. Dies wird durch die folgende Überlegung deutlich: Ein Polykristall besitzt im allgemeinen keine ausgezeichnete Materialkomponente wie beispielsweise das Matrixmaterial eines Verbundstoffes. Eine geeignete Homogenisierungstechnik sollte diese Eigenschaft berücksichtigen. Durch die Verwendung des effektiven Modulus werden bei der selbstkonsistenten Methode die Wechselwirkungen aller Materialbestandteile allein gemäß ihrer jeweiligen Volumenanteile berücksichtigt. Wie gefordert, gibt es damit keine explizit hervorgehobene Materialkomponente. Unter den zahlreichen Veröffentlichungen zur selbstkonsistenten Homogenisierung stechen insbesondere die Arbeiten von Hill heraus, welche sich vor allem mit elastisch-plastischen Polykristallen [41, 43] und Kompositen [42] befassen. Etwas neuer sind die Arbeiten von Lebensohn, welche sich ausgiebig mit der selbstkonsistenten Modellierung von viskoplastischen Polykristallen [46, 47, 49] und dem Vergleich der Methode mit feinskaligen klassischen Simulationen [48] beschäftigen.

Numerische Homogenisierung

In der numerischen Homogenisierung wird das hinreichend genau modellierte RVE direkt mithilfe der Finiten-Elemente-Methode oder einem anderen passenden numerischen Verfahren simuliert. Nach einer erfolgreichen mikroskopischen Rechnung wird die Materialantwort des aktuellen makroskopischen Punktes mithilfe von Volumenmittlungen über dem RVE gewon-

nen. Sind alle makroskopischen Punkte durchlaufen, kann der nächste makroskopische Iterationsschritt durchgeführt werden. Da die mikro- und makroskopischen Rechnungen demnach permanent Daten miteinander austauschen, sind beide Ebenen vollständig gekoppelt. Dies setzt im Vergleich zu den vorgestellten mikromechanischen Methoden schnellere Prozessoren und erheblich größere Speichereinheiten im Computer voraus.

Im Gegensatz zu den mikromechanischen Methoden steht bei der numerischen Homogenisierung das Verschiebungsfeld stärker im Mittelpunkt. Es wird im allgemeinen additiv in einen rein makroskopischen und einen rein mikroskopisch fluktuativen Anteil zerlegt. Während der makroskopische Anteil auf der makroskopischen Ebene numerisch zu bestimmen ist, muß die mikroskopische Fluktuation für jeden makroskopischen Punkt auf dem dazugehörigen RVE ermittelt werden.

Aufgrund des relativ allgemeinen Ansatzes kann die numerische Homogenisierung prinzipiell für jedes Materialmodell angewendet werden. Entscheidend dabei ist, daß das RVE die Heterogenitäten sowohl geometrisch als auch materialspezifisch hinreichend genau repräsentiert. Erwähnenswert sind unter anderem die Arbeiten von Miehe, Schröder und Wriggers [57, 58, 59, 60, 61, 78].

Mathematische Homogenisierung

Bei der mathematischen Homogenisierung wird das ursprüngliche mechanische Problem einem mathematischen Formalismus unterworfen, der die auftretenden Gleichungen und Randbedingungen mithilfe von Funktionenräumen und Operatoren charakterisiert. Darauf aufbauend können unterschiedliche Konvergenzbegriffe und Grenzwertprozesse für das formalisierte Problem eingeführt werden. Die gewonnenen Grenzwerte stellen im Idealfall ein vollständiges, homogenisiertes Ersatzproblem dar, dessen Approximationsgüte vermöge der verwendeten Konvergenzart bekannt oder zumindest abschätzbar ist. Neben der klassischen *Methode der asymptotischen Entwicklung* und der in den 1990ern entwickelten *Zweiskalenkonvergenz*, welche beide in dieser Arbeit detaillierter beschrieben werden, existieren zum Beispiel die *Gamma*-, die *G*- und die *H*-Konvergenz [5, 14, 32, 68].

Allen mathematischen Homogenisierungsmethoden ist die starke Fokussierung auf elastische Probleme für kleine Deformationen gemeinsam. Dies liegt darin begründet, daß die verwendeten Konvergenzbegriffe im mathematischen Sinn schwach sind, weswegen der Grenzwert von beliebigen (Funktionen-)Produkten im allgemeinen nicht explizit ermittelt werden kann. Dadurch ist die Behandlung nichtlinearer Gleichungen, welche beispielsweise für große Deformationen notwendig sind, in den meisten Fällen nicht möglich. Ein weiteres Problem stellen Viskositätsmodelle dar, da sie durch die zusätzliche Zeitvariable zu Anfangs-Randwertproblemen führen, welche von den oben erwähnten Methoden nicht behandelt werden können. Diesbezüglich hat Alber in [2] und [3] die Methode der asymptotischen Entwicklung für gewisse elastisch-viskoplastische Materialmodelle und kleine Deformationen erfolgreich modifiziert.

Die Ergebnisse der mathematischen Homogenisierung sind denen der numerischen Methoden auf den ersten Blick ähnlich, unterscheiden sich aber beispielsweise bezüglich der Auferlegung der makroskopischen Deformation auf das RVE. Ein entscheidender Vorteil gegenüber numerischen Methoden liegt jedoch in dem zugrunde liegenden Grenzwertbegriff und den damit verbundenen mathematisch bewiesenen Konvergenzbeziehungen zwischen echter und homogenisierter Lösung.

3 Mathematische Vorbereitung

3.1 Allgemeine Definitionen und Sätze

Die in dieser Arbeit behandelten Homogenisierungsmethoden benötigen grundlegende mathematische Definitionen und Aussagen. Diese werden in diesem Abschnitt zusammengefaßt.

Definition 1 (\mathcal{Y} -Periodizität)

Für beliebige aber feste $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{R}$ sei durch $\mathcal{Y} = (0, l_1) \times \dots \times (0, l_n) \subset \mathbb{R}^n$ ein Parallelepiped gegeben. Weiter bezeichne $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis im \mathbb{R}^n . Wir betrachten eine Funktion $f(x)$, welche fast überall in \mathbb{R}^n definiert ist. $f(x)$ heißt \mathcal{Y} -periodisch (bezüglich x) genau dann, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Beziehung $f(x + kl_i e_i) = f(x)$ fast überall in \mathbb{R}^n erfüllt ist, wobei hier nicht über gleiche Indizes summiert wird.

Wir werden im Abschnitt über periodische Mikrostrukturen feststellen, daß im Rahmen der mathematischen Homogenisierung die Variablentransformation $y = \frac{x}{\varepsilon}$ für \mathcal{Y} -periodische Funktionen wichtig ist. Zum besseren Verständnis dieser Transformation betrachten wir auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine im zweiten Argument \mathcal{Y} -periodische Funktion $f(x, y)$, welche mithilfe von $y = \frac{x}{\varepsilon}$ auf eine Funktion $f^\varepsilon(x) := f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ eingeschränkt wird. Abbildung 3.1 verdeutlicht dies anhand von

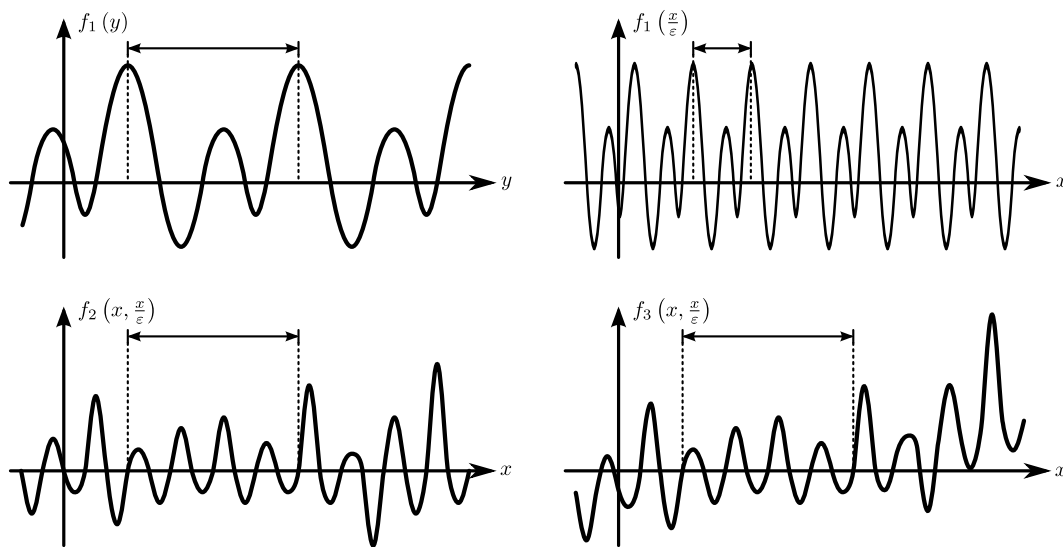


Abbildung 3.1: Einschränkung von Funktionen $f_i(x, y)$ auf $f_i(x, \frac{x}{\varepsilon})$

eindimensionalen Beispielen. Dort signalisieren die beiden gestrichelten Linien jeweils den Anfang und das Ende einer Periode. Die Funktion f_1 stellt eine nur von y abhängige \mathcal{Y} -periodische Funktion dar, deren Frequenz durch die Transformation $y = \frac{x}{\varepsilon}$ unter der Voraussetzung $\varepsilon < 1$ erhöht werden kann. Die dadurch gewonnene Funktion $\tilde{f}_1(x) := f_1(\frac{x}{\varepsilon})$ kann als $\varepsilon\mathcal{Y}$ -periodisch aufgefaßt werden, wobei $\varepsilon\mathcal{Y}$ das vermöge der Kantenlängentransformation εl_i geschrumpfte Parallelepiped \mathcal{Y} darstellt. Funktion f_2 zeigt, wie die zusätzliche Abhängigkeit von x allein die Amplitude einer Schwingung modulieren kann. Funktion f_3 stellt die mögliche Verzerrung eines

solchen Verlaufs dar, welche durch einen weiteren von der Schwingung abgekoppelten und nur von x abhängigen Term erzeugt werden kann.

Definition 2 (Funktionenräume)

Es seien das offene und beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dessen Abschluß über den stetigen Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ verfüge, sowie der Parallelepiped $\mathcal{V} = (0, l_1) \times \cdots \times (0, l_n) \subset \mathbb{R}^n$ aus Definition 1 gegeben. Dann definieren wir die folgenden Funktionenräume:

Spezielle Räume \mathbb{R} -skalarwertiger stetiger Funktionen:

- $C(\Omega) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
- $C_0(\Omega) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und mit kompaktem Träger } \overline{\{x | x \in \Omega \text{ und } f(x) \neq 0\}} \subset \Omega\}$
- $C^n(\Omega) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und in } \Omega \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\} \text{ für } n \in \mathbb{N}^+$
- $C_0^\infty(\Omega) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, unendlich oft in } \Omega \text{ stetig differenzierbar und mit kompaktem Träger } \overline{\{x | x \in \Omega \text{ und } f(x) \neq 0\}} \subset \Omega\}$
- $C_{\text{per}}(\mathcal{V}) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und } \mathcal{V}\text{-periodisch}\}$
- $C_{\text{per}}^n(\mathcal{V}) := \{f | f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, in } \mathcal{V} \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar und } \mathcal{V}\text{-periodisch}\} \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$

Lebesgue- und Sobolev-Räume \mathbb{R} -skalarwertiger Funktionen:

- $L^p(\Omega) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar und } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\} \text{ für } 1 \leq p < +\infty$
- $L^\infty(\Omega) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar und es gibt ein } C \in \mathbb{R} \text{ mit } |f| \leq C \text{ fast überall in } \Omega\}$
- $L_{\text{loc}}^p(\Omega) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar und } f \in L^p(K) \text{ für alle kompakten Teilmengen } K \subset \Omega\}$
- $L_{\text{per}}^p(\mathcal{V}) := \{f | f \in L^p(\mathcal{V}) \text{ und } \mathcal{V}\text{-periodisch}\} \text{ für } 1 \leq p \leq +\infty$
- $W^{m,p}(\Omega) := \{f | f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ mit } |\alpha| \leq m\} \text{ für } 1 \leq p \leq +\infty$
und $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega) = \{f | f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i = 1, \dots, n\}$
- $H_0^1(\Omega) := \{f | f \in H^1(\Omega) \text{ und } \gamma(f) = 0\} \text{ mit } \gamma(f) \text{ gemäß Satz 6}$
- $H_{\text{per}}^1(\mathcal{V}) := \{f | f \in H^1(\mathcal{V}) \text{ und } \mathcal{V}\text{-periodisch}\}$

- $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \{g \mid g = \gamma(f) \text{ für ein } f \in H^1(\Omega)\}$ mit $\gamma(f)$ gemäß Satz 6

Spezielle Faktorräume \mathbb{R} -skalarwertiger Funktionen:

- $W(\Omega) := H^1(\Omega)/\mathbb{R}$
- $W_{\text{per}}(\mathcal{Y}) := H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})/\mathbb{R} = \left\{f \mid f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y}) \text{ mit } \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f(y) dy = 0\right\}$
- $W_{\text{per}}^{1,\infty}(\mathcal{Y}) := \left\{f \mid f \in W^{1,\infty}(\mathcal{Y})/\mathbb{R} \text{ und } \mathcal{Y}\text{-periodisch}\right\}$
 $= \left\{f \mid f \in W^{1,\infty}(\mathcal{Y}) \text{ mit } \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f(y) dy = 0 \text{ und } f \text{ ist } \mathcal{Y}\text{-periodisch}\right\}$

Spezielle Dualräume \mathbb{R} -skalarwertiger Funktionen:

- $D'(\Omega) := (C_0^\infty(\Omega))' = \{f' \mid f' \text{ ist Distribution auf } \Omega \text{ d.h. } f' : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear und stetig bzgl. Funktionenfolgen in } C_0^\infty(\Omega)\}$
- $H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$
- $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))'$

Spezielle allgemeinere Räume skalarwertiger Funktionen:

- $D(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(\mathcal{Y})) := \left\{f \mid f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar, } f(x, \cdot) \in C_{\text{per}}^\infty(\mathcal{Y}) \text{ für alle } x \in \Omega, \text{ die Abbildung } x \in \Omega \rightarrow f(x, \cdot) \in C_{\text{per}}^\infty(\mathcal{Y}) \text{ ist unendlich oft stetig differenzierbar mit kompaktem Träger in } \Omega\right\}$
- $L^2(\Omega; C_{\text{per}}(\mathcal{Y})) := \left\{f \mid f : \Omega \rightarrow C_{\text{per}}(\mathcal{Y}) \text{ meßbar mit } \|f(x)\|_{C_{\text{per}}(\mathcal{Y})} \in L^2(\Omega), \text{ das heißt } \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|_{C_{\text{per}}(\mathcal{Y})}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}$
- $L^2(\Omega; W_{\text{per}}(\mathcal{Y})) := \left\{f \mid f : \Omega \rightarrow W_{\text{per}}(\mathcal{Y}) \text{ meßbar mit } \|f(x)\|_{W_{\text{per}}(\mathcal{Y})} \in L^2(\Omega), \text{ das heißt } \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|_{W_{\text{per}}(\mathcal{Y})}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}$

Allgemeine Definition von Räumen:

- $\mathfrak{X}(\Omega; \mathfrak{Z}) := \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathfrak{Z} \text{ mit } \|f(x)\|_{\mathfrak{Z}} \in \mathfrak{X}(\Omega)\}$ für geeignete Räume \mathfrak{X} und \mathfrak{Z}

Es gilt damit beispielsweise auch $L^2(\Omega; L^2(\mathcal{Y})) = L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$. Neben den beiden bereits definierten Räumen skalarwertiger Funktionen $L^2(\Omega; C_{\text{per}}(\mathcal{Y}))$ und $L^2(\Omega; W_{\text{per}}(\mathcal{Y}))$ fol-

gen zwei weitere Beispiele für Räume vektor- und tensorwertiger Funktionen, welche diesem allgemeinen Schema entsprechen:

- $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) := \{f | f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \in L^2(\Omega)\}$
- $H^1(\mathcal{Y}; \mathcal{M}_{sym}^n) := \{f | f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}_{sym}^n \text{ mit } \|f(y)\|_{\mathcal{M}_{sym}^n} \in H^1(\mathcal{Y})\}$

Andere Räume:

- $\mathcal{M}^n :=$ Menge aller $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R}
- $\mathcal{M}_{sym}^n :=$ Menge aller symmetrischen $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R}
- $\mathcal{M}_{>0}^n :=$ Menge aller symmetrischen positiv definiten $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R}
- $\mathcal{M}_+^n := \{\mathbf{F} | \mathbf{F} \in \mathcal{M}^n \text{ mit } \det \mathbf{F} > 0\}$
- $\mathfrak{M}^n(\alpha, \beta, \Omega) := \{\mathbf{F} | \mathbf{F} = F_{ij} \text{ für } i, j = 1, \dots, n \text{ mit } F_{ij} \in L^\infty(\Omega), \alpha \|\mathbf{v}\|^2 \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \text{ und } \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\| \leq \beta \|\mathbf{v}\| \text{ für alle } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ fast überall in } \Omega \text{ und } 0 < \alpha < \beta\}$
- $\mathfrak{M}_e^n(\alpha, \beta, \Omega) := \{\mathbf{F} | \mathbf{F} = F_{ijkl} \text{ für } i, j, k, l = 1, \dots, n \text{ mit } F_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), F_{ijkl} = F_{jikl} = F_{klij}, \alpha \|\mathbf{M}\|^2 \leq \mathbf{M} : \mathbf{F} : \mathbf{M} \text{ und } \|\mathbf{F} : \mathbf{M}\| \leq \beta \|\mathbf{M}\| \text{ für alle } \mathbf{M} \in \mathcal{M}_{sym}^n \text{ fast überall in } \Omega \text{ und } 0 < \alpha < \beta\}$

Auftretende partielle Ableitungen, wie sie beispielsweise bei der Definition von $H^1(\Omega)$ zu finden sind, sollen im Sinne von Definition 3 stets schwach verstanden werden.

Definition 3 (Schwache partielle Ableitungen, [74], Seite 198)

Es seien zwei Funktionen $f, g \in L_{loc}^1(\Omega)$ gegeben. Gilt unter Verwendung des verallgemeinerten Differentialoperators $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ die Beziehung

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx, \quad (3.1)$$

so bezeichnet man g als die α -te schwache partielle Ableitung von f und definiert $D^\alpha f(x) := g(x)$. Existiert die klassische α -te partielle Ableitung von f , so fallen beide Begriffe zusammen.

Anmerkung 4

\mathcal{Y} -periodische Funktionen aus Räumen wie $L_{per}^p(\mathcal{Y})$ oder $C_{per}^\infty(\mathcal{Y})$ sind gemäß Definition 1 fast überall in \mathbb{R}^n und damit auch fast überall in Ω definiert.

Anmerkung 5

Im Bezug zu den Referenz- und Momentankonfigurationen $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ und \mathcal{R}_t der Kontinuumsmechanik und im Hinblick auf die im nächsten Kapitel eingeführten periodischen Mikrostrukturen kann insbesondere $(\Omega; \mathcal{Y}) := (\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ oder $(\Omega; \mathcal{Y}) := (\mathcal{R}_t; \mathcal{Y}_t)$ verwendet werden.

Im allgemeinen betrachten wir Funktionen f , welche in bestimmten L^p -Räumen liegen und damit konstruktionsbedingt nicht auf Nullmengen definiert sind. Da Randmengen als Nullmengen aufgefaßt werden können, ist die Betrachtung der Randwerte von f aufgrund der vorliegenden Mehrdeutigkeit zunächst nicht möglich. Für Funktionen aus dem $H^1(\Omega)$ läßt sich jedoch die sogenannte *Spur* definieren, welche eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Randwertbegriffs darstellt. Der folgende Satz charakterisiert dies genauer.

Satz 6 (Spursatz, [20], Theorem 3.28)

Es sei ein offenes und beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit stetigem Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ gegeben. Dann gibt es eine eindeutige stetige lineare Abbildung

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega) . \quad (3.2)$$

Man nennt $\gamma(f)$ die Spur von f auf $\partial\Omega$. Für jede Funktion $f \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ liefert die Spur genau die klassischen Randwerte von f . In diesem Fall gilt also $\gamma(f) = f|_{\partial\Omega}$.

Wird auf dem Rand nicht die Funktion selbst, sondern vielmehr ihre Wirkung in Außennormalenrichtung betrachtet, so muß der nächste Satz beachtet werden.

Satz 7 (Normalenrandwerte, [20], Proposition 3.47)

Es sei ein offenes und beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit stetigem Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ gegeben. Weiter bezeichne n die Außennormale an $\partial\Omega$. Für Funktionen $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, deren Divergenz $\operatorname{div} f$ in $L^2(\Omega)$ liegt, gilt:

- $f(x) \cdot n(x) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$
- Die Abbildung $f \longmapsto f \cdot n$ ist linear und stetig

Zusätzlich läßt sich $L^2(\partial\Omega)$ kompakt in $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ einbetten.

Anmerkung 8 (Dichtheitssätze)

Es folgen verschiedene allgemeine Dichtheitsaussagen aus der Maßtheorie:

- $L^q(\Omega) \overset{\text{dicht}}{\subset} L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ bezüglich der L^p -Norm [20, Korollar 1.35]

- $C_0^\infty(\Omega) \overset{\text{dicht}}{\subset} L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < +\infty$ bezüglich der L^p -Norm [20, Theorem 1.38]
- $C_0^\infty(\Omega) \overset{\text{dicht}}{\subset} H_0^1(\Omega)$ bezüglich der H^1 -Norm [9, Seite 5]
- $C_{\text{per}}^\infty(\mathcal{Y}) \overset{\text{dicht}}{\subset} H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})$ bezüglich der H^1 -Norm [20, Definition 3.48]
- $C^\infty(\overline{\Omega}) \overset{\text{dicht}}{\subset} W^{m,p}(\Omega)$ für alle $1 \leq p \leq +\infty$ und alle $m \in \mathbb{N}$ bezüglich der $W^{m,p}$ -Norm [22, Theorem 5]
- $L^2(\Omega; C_{\text{per}}(\mathcal{Y})) \overset{\text{dicht}}{\subset} L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$ bezüglich der L^2 -Norm [20, Proposition 3.61]

Anmerkung 9 (Inklusionen/Einbettungen)

Für die oben definierten Räume gelten die folgenden Inklusionen/Einbettungen:

- $C_{\text{per}}(\mathcal{Y}) \supset C_0(\mathcal{Y}) \supset C_0^\infty(\mathcal{Y})$,
- $L_{\text{loc}}^1(\Omega) \supset L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p \leq +\infty$
- $L^2(\Omega) \supset H_{\text{per}}^1(\Omega) \supset W_{\text{per}}(\Omega)$
- $H^{-1}(\Omega) \supset L^2(\Omega) \supset H_0^1(\Omega)$ [20, Bemerkung 3.44]
- $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \supset L^2(\partial\Omega)$ [20, Proposition 3.47]
- $L^2(\Omega \times \mathcal{Y}) \supset L^2(\Omega; C_{\text{per}}(\mathcal{Y})) \supset D(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(\mathcal{Y}))$
- $L^2(\Omega \times \mathcal{Y}) \supset L^2(\Omega; W_{\text{per}}(\mathcal{Y}))$

3.2 Modellierung der periodischen Mikrostruktur in mathematischen Homogenisierungstheorien

In mathematischen Homogenisierungstheorien kann der Begriff des Repräsentativen Volumenelements zunächst außer acht gelassen werden. Vielmehr wird zuerst eine Charakterisierung der Mikrostruktur entwickelt, welche einen direkten Bezug zum Folgencharakter der betrachteten Problemgleichungen herstellt.

Ausgangspunkt ist ein Material mit heterogener Mikrostruktur. Wir nehmen an, daß diese Mikrostruktur erst ab einer sehr feinen Skala sichtbar wird, so daß die einzelnen Heterogenitäten im Vergleich zu den Abmessungen des zugrunde liegenden Gesamtkörpers verschwindend klein sind. Des weiteren nehmen wir an, daß sich die vom Gesamtkörper losgelöst betrachtete Mikrostruktur durch eine sogenannte *Einheitszelle* periodisch erzeugen läßt. Diese Einheitszelle wird zunächst in der Größenordnung des Gesamtkörpers modelliert. Die Überdeckung des gesamten \mathbb{R}^n mit der periodischen Aneinanderreihung der Einheitszelle bezeichnen wir mit \mathbb{R}_{per}^n .

Um den betrachteten makroskopischen Körper mit einem solchen periodischen Muster versehen zu können, muß das Größenverhältnis zwischen makroskopischer und mikroskopischer Ebene korrekt abgebildet werden. Dazu wird der Skalierungsparameter ε eingeführt. Er soll das Verhältnis zwischen einer charakteristischen mikroskopischen Länge l und der charakteristischen makroskopischen Länge L gemäß $\varepsilon = \frac{l}{L}$ wiedergeben. So könnte ε für eine polykristalline Turbinenschaufel den Größenunterschied zwischen Schaufeldicke und durchschnittlicher Korngröße des Aggregats darstellen. Allgemein wird mit solchen Überlegungen die übliche Annahme $\varepsilon \ll 1$ gerechtfertigt.

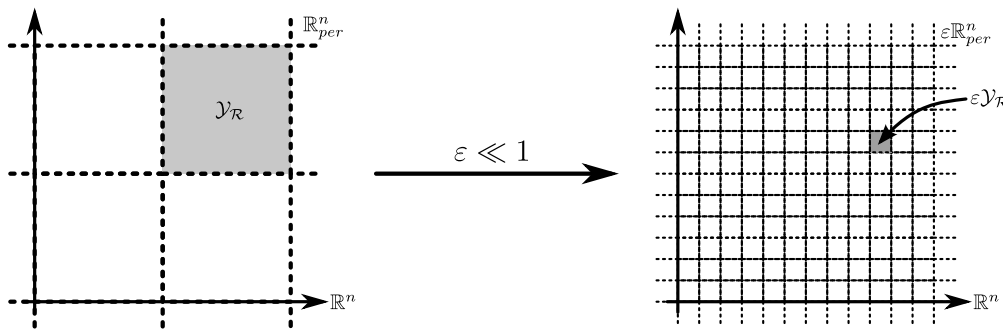


Abbildung 3.2: Periodische Überdeckung des \mathbb{R}^n mit Einheitszellen und anschließende Verkleinerung mithilfe des Skalierungsfaktors ε

Die mit ε skalierte Einheitszelle bezeichnen wir mit $\varepsilon \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$. Aufgrund der damit vollzogenen Verkleinerung verdichtet sich die periodische Überdeckung \mathbb{R}_{per}^n , welche wir dann mit $\varepsilon \mathbb{R}_{per}^n$ bezeichnen wollen. Die Einschränkung von $\varepsilon \mathbb{R}_{per}^n$ auf die räumlichen Ausmaße der Referenzkonfiguration $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ des makroskopischen Körpers versieht den betrachteten Körper mit der gewünschten heterogenen Mikrostruktur. Die beiden Abbildungen 3.2 und 3.3 verdeutlichen diesen Vorgang.

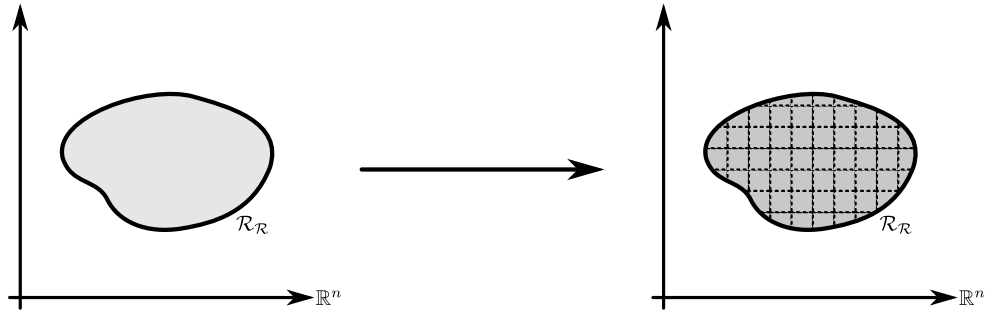


Abbildung 3.3: Verschmelzung der Referenzkonfiguration $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ mit der verdichteten Überdeckung $\varepsilon \mathbb{R}_{per}^n$ zur Gewinnung einer heterogenen Konfiguration

Basierend auf dieser Überlegung definieren wir für das weitere Vorgehen die folgenden Gebiete:

- $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ – makroskopische Referenzkonfiguration mit $\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt
- $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ – stetiger Lipschitz-Rand von $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ mit $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}} := \overline{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \setminus \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$
- $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^{\sigma}$ – Teilbereich von $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ unter Spannungsrandbedingungen
- $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$ – Teilbereich von $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ unter Verschiebungsrandbedingungen
- im allgemeinen nehmen wir $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u \cap \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^{\sigma} = \emptyset$ und $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}} = \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u \cup \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^{\sigma} \cup \mathcal{N}$ mit einer Nullmenge $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^2$ an
- $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ – mikroskopische Referenzeinheit zelle mit $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}} := (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3) \subset \mathbb{R}^3$ für $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit oft $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ gesetzt und dadurch der Name *Einheitszelle* gerechtfertigt wird
- $\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ – Rand von $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ mit $\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} := \overline{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \setminus \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$
- $(\dots)_t$ – Größe (\dots) in Momentankonfiguration, insbesondere \mathcal{R}_t , $\partial \mathcal{R}_t$, $\partial \mathcal{R}_t^{\sigma}$, $\partial \mathcal{R}_t^u$, \mathcal{Y}_t und $\partial \mathcal{Y}_t$

Einführung von mikro- und makroskopischen Variablen

Da die makroskopische Ebene die Heterogenitäten der mikroskopischen Struktur aufgrund des gegebenen Größenunterschieds nicht "sehen" kann, behandeln wir die beiden Bereiche $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ und $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ im ersten Schritt formal getrennt voneinander und führen dort jeweils die Ortsvariablen \mathbf{X} und \mathbf{Y} ein. Wir bezeichnen $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ als *makroskopische* und $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ als *mikroskopische* Variable.

Im zweiten Schritt suchen wir nach einer geeigneten Verknüpfung der beiden Skalen \mathbf{X} und \mathbf{Y} , um auf der einen Seite das Übereinanderlegen von makroskopischer und mikroskopischer Struktur zu rechtfertigen und auf der anderen den Skalengrößenunterschied richtig abzubilden. Wir betrachten den mit einer Mikrostruktur unterlegten makroskopischen Bereich $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$. Mithilfe des Skalierungsparameters ε lässt sich jedes makroskopische \mathbf{X} vermöge $\mathbf{X} = \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{Y})$ eindeutig

darstellen. Der Vektor \mathbf{k} ist für bestimmte $z_i \in \mathbb{Z}$ komponentenweise durch $k_i = z_i l_i$ gegeben, wobei über den Index i nicht summiert werden soll. Mithilfe von $\varepsilon \mathbf{k}$ gelangen wir vom globalen Nullpunkt zum lokalen Ursprung derjenigen verkleinerten Einheitszelle, in welcher sich der betrachtete Punkt \mathbf{X} befindet. Der Restterm $\varepsilon \mathbf{Y}$ zeigt von diesem Ursprung aus auf den tatsächlichen Punkt. Abbildung 3.4 verdeutlicht diesen Vorgang schematisch.

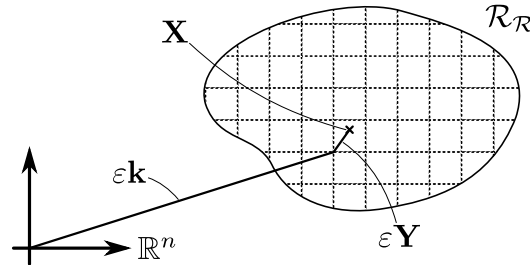


Abbildung 3.4: Darstellung von \mathbf{X} mithilfe von \mathbf{Y}

Bei $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodischen Funktionen ist aufgrund der periodischen Mikrostruktur die Wahl $\mathbf{k} = 0$ zulässig. Dies führt in diesem Fall zu der vereinfachten Variablentransformation

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \quad \text{für } \varepsilon \ll 1. \quad (3.3)$$

Anschaulich erhalten wir damit die mikroskopische Ortsangabe \mathbf{Y} durch Vergrößern des makroskopischen Wertes \mathbf{X} vermöge der Multiplikation mit $\frac{1}{\varepsilon} \gg 1$. Andersherum verschwindet die mikroskopische Skala beim Wechsel auf die makroskopische Ebene asymptotisch vermöge $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{Y}$. Siehe dazu auch Abbildung 3.5.

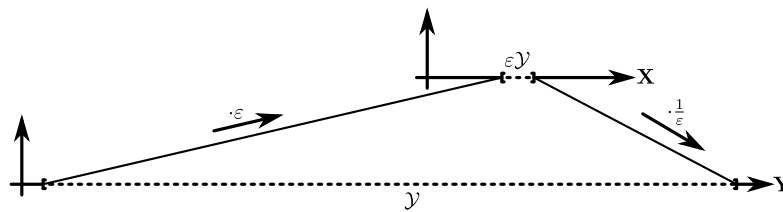


Abbildung 3.5: Skalenübergang als Vergrößerung

Im Rahmen mathematischer Homogenisierungstheorien wird bei Größen, welche durch die vorhandene periodische Mikrostruktur beeinflusst werden, dieser Einfluß durch ein hochgestelltes ε angedeutet. Aus einem gesuchten Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ in Referenzkonfiguration wird damit beispielsweise der formale Ausdruck $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})$, die momentane lokale statische Impulsbilanz $\operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$ schreiben wir dann als $\operatorname{div} \sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$. Beim zweiten Beispiel haben wir vorausgesetzt, daß die Volumenkräfte \mathbf{b} nicht von der Mikrostruktur abhängen. Dies ist beispielsweise für die Gravitationskraft eine gültige Annahme. Es ist zu beachten, daß im allgemeinen die Beziehung $f^\varepsilon(\mathbf{X}) = f\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ nicht gilt.

4 Methode der asymptotischen Entwicklung für klassische Kontinua

4.1 Asymptotische Entwicklung für lineare Elastizität

In diesem Abschnitt soll die Methode der asymptotischen Entwicklung genauer vorgestellt werden. Sie darf als die erste rein mathematische Homogenisierungstechnik angesehen werden und dient damit als wichtige Grundlage und Referenz für neuere mathematische Theorien. Wir werden zunächst das abstrakte Problem kennenlernen, für dessen Beschreibung wir auf die Begriffe des letzten Kapitels zurückgreifen. Nach der Diskussion des klassischen eindimensionalen Problems und der anschließenden Verallgemeinerung auf die benötigten drei Dimensionen folgt die Einordnung in den Kontext der linearen Elastizität bei periodischen Mikrostrukturen.

Eindimensionales mathematisches Modellproblem mit homogenen Dirichlet-Randdaten

Die Methode der asymptotischen Entwicklung ist ein etablierter Lösungsansatz für bestimmte elliptische partielle Differentialgleichungen mit periodisch oszillierenden Koeffizienten. Als Referenz können die Arbeiten [6], [9], [20] und [68] dienen. Im Rahmen der Kontinuumsmechanik läßt sich mit diesem Verfahren ein Homogenisierungsprozeß für lineare Elastizität ableiten. Wir betrachten das sogenannte *Dirichlet*-Modellproblem mit Nullranddaten:

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon) = b \quad \text{in } \mathcal{R}_\mathcal{R}, \quad (4.1a)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}, \quad (4.1b)$$

wobei für $i, j = 1, 2, 3$ erfüllt sein sollen: $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{X}) = a_{ij}^\varepsilon(\mathbf{X}) := a_{ij}\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ fast überall in \mathbb{R}^3 , $\mathbf{A}(\mathbf{Y}) = a_{ij}(\mathbf{Y}) \in \mathfrak{M}^3(\alpha, \beta, \mathcal{Y}_\mathcal{R})$ und $a_{ij}(\mathbf{Y})$ $\mathcal{Y}_\mathcal{R}$ -periodisch. Es ist ein bekanntes Resultat, daß das Problem (4.1) für jedes $\varepsilon > 0$ und alle vorgegebenen $b(\mathbf{X}) \in H^{-1}(\mathcal{R}_\mathcal{R})$ eine eindeutige Lösung $u^\varepsilon(\mathbf{X}) \in H_0^1(\mathcal{R}_\mathcal{R})$ besitzt.

Mit der Definition des Operators $\mathfrak{A}_\varepsilon := -\frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_{ij}^\varepsilon(\mathbf{X}) \frac{\partial}{\partial X_j} \right)$ schreibt sich Gleichung (4.1a) alternativ als $\mathfrak{A}_\varepsilon u^\varepsilon = b$ in $\mathcal{R}_\mathcal{R}$. Als Resultat eines erfolgreichen Homogenisierungsprozesses erwarten wir einen Operator $\mathfrak{A}_{\text{hom}}$, welcher im besten Fall denselben strukturellen Aufbau wie \mathfrak{A}_ε besitzt und damit konkret durch $\mathfrak{A}_{\text{hom}} = -\frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_{ij}^{\text{hom}} \frac{\partial}{\partial X_j} \right)$ für ein geeignetes a_{ij}^{hom} gegeben wäre.

Es sind bereits zwei wichtige Einschränkungen vorgenommen worden: Erstens beschreibt das Modellproblem nur eine eindimensionale *skalarwertige* Unbekannte $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ über einer dreidimensionalen Menge $\mathcal{R}_\mathcal{R}$. Zweitens liegen *Nullranddaten* für u^ε vor. Dies ist für $C \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit konstanten Randwerten $u^\varepsilon = C$ auf $\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}$. Denn jede beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ erfüllt die Differentialgleichung (4.1a) für die spezielle rechte Seite $b = 0$ und kann damit aufgrund der Linearität des Differentialoperators mit dem homogenen Ausgangsproblem gemäß dem Superpositionsprinzip überlagert werden.

Für eine große Klasse von mechanischen Problemen sind jedoch allgemeinere Randdaten wie nichtkonstante Funktionen oder Vorgaben für gewisse Ableitungen von u^ε erforderlich. Wir behandeln diese beiden Aspekte, nachdem wir das Prinzip der asymptotischen Entwicklung auf das eindimensionale Modellproblem (4.1) erfolgreich angewendet haben.

Ansatz der asymptotischen Entwicklung und Zerlegung des Modellproblems

Wir betrachten beliebige Funktionen $u_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, welche auf $\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ definiert und bezüglich \mathbf{Y} $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch sein sollen, und bilden mit ihnen unter der Verwendung des Skalierungsparameters ε die Funktionenreihe $u(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Anschließend nehmen wir für die in (4.1) gesuchte Funktion $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ an, daß sie für bestimmte $u_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ durch eine solche Reihe gemäß

$$u^\varepsilon(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} u\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \quad (4.2)$$

dargestellt werden kann. Dieser Reihenansatz ist mathematisch formaler Natur und entspricht keiner physikalischen Anschauung. Wir möchten Ansatz (4.2) in die Differentialgleichung (4.1a) einsetzen. Dabei müssen wir für Funktionen $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, welche der speziellen Einschränkung $f^\varepsilon(\mathbf{X}) := f(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon})$ unterliegen, die Differentiationsregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial X_i}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial f}{\partial X_i}\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial Y_i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} \\ &= \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y_i} + \frac{\partial}{\partial X_i} \right) f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

beachten. Wir lassen die Einschränkung $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}$ fallen und betrachten \mathbf{X} und \mathbf{Y} formal getrennt voneinander. Diese Verallgemeinerung erscheint zunächst willkürlich, führt aber zu keinen zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Herleitung der homogenisierten Lösung. Gleichung (4.1a) transformiert sich damit gemäß

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial X_j} \right) \\ &= -\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y_i} + \frac{\partial}{\partial X_i} \right) \left[a_{ij} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} \right) u \right] \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{\partial}{\partial Y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial Y_j} \right) \right] u - \frac{1}{\varepsilon^1} \left[\frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial Y_j} \right) + \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \right] u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\varepsilon^0} \left[\frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \right] u \\
& = \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \mathfrak{A}_0 + \frac{1}{\varepsilon^1} \mathfrak{A}_1 + \frac{1}{\varepsilon^0} \mathfrak{A}_2 \right) u,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei wir im letzten Schritt die Operatoren

$$\mathfrak{A}_0 := -\frac{\partial}{\partial Y_i} \left(a_{ij}(\mathbf{Y}) \frac{\partial}{\partial Y_j} \right), \tag{4.5a}$$

$$\mathfrak{A}_1 := -\frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_{ij}(\mathbf{Y}) \frac{\partial}{\partial Y_j} \right) - \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(a_{ij}(\mathbf{Y}) \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \quad \text{und} \tag{4.5b}$$

$$\mathfrak{A}_2 := -\frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_{ij}(\mathbf{Y}) \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \tag{4.5c}$$

eingeführt haben. Einsetzen der Reihendarstellung für $u(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ liefert die Gleichung

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 b &= \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \mathfrak{A}_0 + \frac{1}{\varepsilon^1} \mathfrak{A}_1 + \frac{1}{\varepsilon^0} \mathfrak{A}_2 \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i \right) \\
&= \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \mathfrak{A}_0 + \frac{1}{\varepsilon^1} \mathfrak{A}_1 + \frac{1}{\varepsilon^0} \mathfrak{A}_2 \right) \left(\varepsilon^0 u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon^i u_i \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathfrak{A}_0 u_0) + \frac{1}{\varepsilon^1} (\mathfrak{A}_1 u_0 + \mathfrak{A}_0 u_1) + \varepsilon^0 (\mathfrak{A}_2 u_0 + \mathfrak{A}_1 u_1 + \mathfrak{A}_0 u_2) + \dots
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Vermöge eines Koeffizientenvergleichs bezüglich der drei Potenzen ε^{-2} , ε^{-1} und ε^0 kann Gleichung (4.1a) auf $\mathscr{Y}_{\mathcal{R}}$ in die folgenden drei Teilprobleme zerlegt werden:

$$\mathfrak{A}_0 u_0 = 0 \quad \text{in } \mathscr{Y}_{\mathcal{R}}, \tag{4.7a}$$

$$u_0 \text{ ist } \mathscr{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch bezüglich } \mathbf{Y}, \tag{4.7b}$$

$$\mathfrak{A}_0 u_1 = -\mathfrak{A}_1 u_0 \quad \text{in } \mathscr{Y}_{\mathcal{R}}, \tag{4.8a}$$

$$u_1 \text{ ist } \mathscr{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch bezüglich } \mathbf{Y}, \tag{4.8b}$$

$$\mathfrak{A}_0 u_2 = b - \mathfrak{A}_1 u_1 - \mathfrak{A}_2 u_0 \quad \text{in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (4.9a)$$

$$u_2 \text{ ist } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch bezüglich } \mathbf{Y}. \quad (4.9b)$$

Wir hätten den Koeffizientenvergleich auch für weitere Potenzen von ε bis hin zu beliebig vielen Reihengliedern durchführen können. Für eine geeignete homogenisierte Lösung sind die ausgewählten drei Gleichungen mit der Betrachtung über $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ jedoch schon ausreichend.

Homogenisierte Lösung des zerlegten Modellproblems

Gemäß [9] folgt aus Teilproblem (4.7), daß die erste gesuchte Funktion der Reihenentwicklung, u_0 , nicht von \mathbf{X} und \mathbf{Y} , sondern nur von \mathbf{X} abhängen kann. Teilproblem (4.8) führt unter Ausnutzung der Linearität des Modellproblems und der damit möglichen Trennung der Veränderlichen für $j = 1, 2, 3$ zu den drei sogenannten *mikroskopischen Hilfsproblemen*

$$\mathfrak{A}_0 \chi_j \stackrel{!}{=} -\frac{\partial a_{ij}}{\partial Y_i} \quad \text{in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (4.10a)$$

$$\chi_j \text{ ist } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch}. \quad (4.10b)$$

Jedes Hilfsproblem besitzt eine eindeutige Lösung $\chi_j \in W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$. Damit ist jedes χ_j nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmbar. Die Beziehung $\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \chi_j(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} = 0$ behebt diese Mehrdeutigkeit. Für u_1 folgt damit die multiplikative Zerlegung

$$u_1 = -\chi_j \frac{\partial u_0}{\partial X_j}, \quad (4.11)$$

welche aus der rein mikroskopischen Funktion χ_j und dem Gradienten der rein makroskopischen Größe u_0 besteht. Mithilfe von Teilproblem (4.9), welches genau dann eine Lösung besitzt, wenn das Integral $\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} u_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y}$ gleich Null ist, der Lösung $\chi_j(\mathbf{Y})$ des mikroskopischen Hilfsproblems (4.10) und der Zerlegung (4.11) erhalten wir das homogenisierte makroskopische Problem

$$-\left[\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \left(a_{ij} - a_{ik} \frac{\partial \chi_j}{\partial Y_k} \right) d\mathbf{Y} \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_i \partial X_j} = b \quad \text{in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}. \quad (4.12)$$

Es ist gemäß [20] bekannt, daß (4.12) für alle Funktionen $b(\mathbf{X}) \in H^{-1}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ eine eindeutige Lösung $u_0(\mathbf{X})$ in $H_0^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ besitzt und damit auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ dieselbe Randbedingung $u_0(\mathbf{X}) = 0$

wie $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ im Modellproblem erfüllt. $u_0(\mathbf{X})$ stellt die homogenisierte Lösung von $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ dar. Der gesuchte homogenisierte Operator \mathfrak{A}_{hom} ist durch $\mathfrak{A}_{hom} = -a_{ij}^{hom} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}$ mit $a_{ij}^{hom} := \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \left(a_{ij}(\mathbf{Y}) - a_{ik}(\mathbf{Y}) \frac{\partial \chi_j}{\partial Y_k}(\mathbf{Y}) \right) d\mathbf{Y}$ gegeben. Falls die Symmetrie $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, 2, 3$ gegeben ist, so gilt diese Eigenschaft auch für die homogenisierte Matrix $\mathbf{A}^{hom} := a_{ij}^{hom}$.

Anschaulich können wir uns den Unterschied zwischen homogenisierter und exakter Lösung gemäß der *schematischen* Abbildung 4.1 vorstellen: Die homogenisierte Lösung $u_0(\mathbf{X})$ stellt eine Glättung der aufgrund der periodischen Koeffizienten oszillierenden Funktion $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ dar. In [6] wurde für einige Beispiele sowohl die homogenisierte als auch die exakte oszillierende Lösung für ausgewählte ε ermittelt. Die dortigen Diagramme, welche jeweils die Verläufe dieser beiden Lösungen veranschaulichen und vergleichen, verhalten sich prinzipiell wie die Kurven in Abbildung 4.1. Entscheidend ist die Frage, ob und auf welche Weise $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $u_0(\mathbf{X})$ konvergiert.

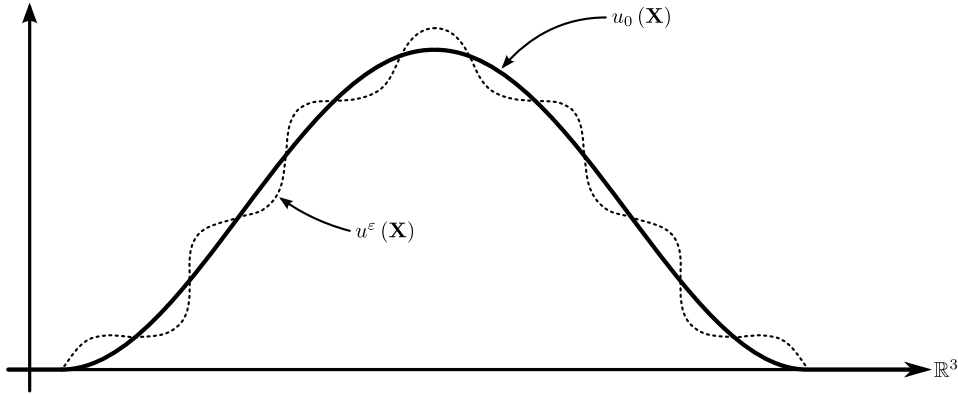


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung von exakter und homogenisierter Lösung

Schwache und starke Konvergenz von $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ gegen $u_0(\mathbf{X})$ mithilfe eines Korrekturterms

Die wünschenswerte starke Konvergenzeigenschaft $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})} = 0$ erfüllt der bisher vorgestellte asymptotische Ansatz nicht. Vielmehr strebt für $\varepsilon \rightarrow \infty$ die tatsächliche Lösung $u^\varepsilon(\mathbf{X})$ nur im $H_0^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ -schwachen Sinn gegen die homogenisierte Lösung $u_0(\mathbf{X})$. Es gilt damit lediglich $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (u^\varepsilon - u_0) \varphi d\mathbf{X} = 0$ für alle $\varphi(\mathbf{X}) \in (H_0^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}))' = H^{-1}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$.

Unter stärkeren Regularitätsanforderungen an das Modellproblem können wir für $k, l = 1, 2, 3$ weitere Hilfsgrößen $\theta_{kl}(\mathbf{Y})$ einführen, mit denen sich ein sogenannter *Korrekturterm* $g(\theta_{kl}, \varepsilon)$ bestimmen lässt. Nehmen wir diesen Korrekturterm zu unserer homogenisierten Lösung hinzu, so gilt in $H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ das starke Konvergenzresultat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u_0 - g(\theta_{kl}, \varepsilon)\|_{H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})} = 0. \quad (4.13)$$

Der Korrekturterm ist unter den Einschränkungen $\chi_k^\varepsilon := \chi_k\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ und $\theta_{kl}^\varepsilon := \theta_{kl}\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ durch die Definition

$$g(\theta_{kl}, \varepsilon) := -\varepsilon \chi_k^\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial X_k} - \varepsilon^2 \theta_{kl}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_k \partial X_l} \quad (4.14)$$

gegeben, wobei sich die Größen $\theta_{kl}(\mathbf{Y})$ in $W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ für jedes $k, l = 1, 2, 3$ eindeutig aus dem folgenden zusätzlichen mikroskopischen Hilfsproblem bestimmen lassen:

$$\mathfrak{A}_0 \theta_{kl} \stackrel{!}{=} -a_{ij}^{hom} - \frac{\partial}{\partial Y_i} (a_{ik} \chi_l) - a_{kj} \frac{\partial}{\partial Y_j} (\chi_l - Y_l) \quad \text{in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (4.15a)$$

$$\theta_{kl} \text{ ist } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch.} \quad (4.15b)$$

Nach [20, Abschnitt 7.2] lauten die geforderten zusätzlichen Regularitätseigenschaften $b(\mathbf{X}) \in C^\infty(\overline{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}})$, $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ ist C^∞ sowie $\chi_l(\mathbf{Y})$ und $\theta_{kl}(\mathbf{Y}) \in W^{1,\infty}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$. Diese Anforderungen sind nicht trivial und können mechanischen Modellierungen mitunter widersprechen. Beispielsweise lieferte uns die Stetigkeit der Matrix $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{X})$ zusammen mit zusätzlichen, an dieser Stelle nicht weiter erläuterten Eigenschaften diese gewünschte Regularität [20, Bemerkung 6.4]. Denken wir dabei aber an die Modellierung von Kompositen, so treten in $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{X})$ zunächst Sprünge auf, da die unterschiedlichen Materialien der Mikrostruktur und die dadurch verbundenen abrupten Wechsel der Materialkonstanten nur so exakt abgebildet werden können. Abhilfe könnte in diesem Fall eine stetige Approximation der auftretenden Sprünge bieten.

Über allgemeine Dirichlet-, Neumann- und gemischte Randdaten

Die Verwendung von homogenen Dirichlet-Randdaten schränkt die Anwendbarkeit der bisherigen Theorie stark ein, weswegen wir weitere Randbedingungstypen zulassen möchten. Als erstes betrachten wir die Verallgemeinerung von homogenen auf *nichthomogene* Dirichlet-Randdaten, wodurch Randvorgaben der Form $u^\varepsilon = \bar{u}$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ für Funktionen $\bar{u}(\mathbf{X}) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ möglich gemacht werden. Der Koeffizientenvergleich bezüglich ε liefert für das homogenisierte Problem (4.12) auf dem Rand $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die Bedingung $u_0(\mathbf{X}) = \bar{u}(\mathbf{X})$. Aus [20] ist bekannt, daß dieses Problem für alle $b(\mathbf{X}) \in H^{-1}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ eine eindeutige Lösung in $H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ besitzt.

Als zweites betrachten wir sogenannte *Neumann*-Randdaten. In diesem Fall ist die Randbedingung (4.1b) des Modellproblems durch die Gleichung

$$n_i a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial X_j} = \bar{t} \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}} \quad (4.16)$$

zu ersetzen, wobei $\mathbf{n}(\mathbf{X})$ die Außeneinheitsnormale an $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ darstellen und $\bar{t}(\mathbf{X})$ in $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ liegen soll. Erneut überträgt der Koeffizientenvergleich die auferlegte Randbedingung vollständig auf die gesuchte homogenisierte Lösung $u_0(\mathbf{X})$, wobei dann in (4.16) der Tensor a_{ij}^ε folgerichtig durch a_{ij}^{hom} ersetzt werden muß. Gemäß [20] kann das homogenisierte Problem (4.12) unter Annahme einer zusätzlichen Kompatibilitätsbedingung für alle $b(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ eindeutig in $W(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ gelöst werden. Mit der Einschränkung $\bar{t}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ läßt sich diese Kompatibilitätsbedingung durch

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} b \, d\mathbf{X} + \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \bar{t} \, d\mathbf{X} = 0 \quad (4.17)$$

darstellen, was physikalisch dem Kräftegleichgewicht des betrachteten Körpers $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ entspricht. Die Einschränkung des Randdatenraums $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ auf $L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ stellt für die spätere physikalische Anwendung in dieser Arbeit keine Einschränkung dar, weswegen auf eine allgemeinere Darstellung der Kompatibilität verzichtet wird.

Als letztes betrachten wir sogenannte *gemischte* Randdaten. Dazu sei $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ in die beiden meßbaren Teilstücke $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$ und $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma$ zerlegt, sodaß die Beziehung $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u \cap \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma = \emptyset$ gilt und die Restmenge $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}} \setminus (\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u \cup \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma)$ eine Nullmenge ist. $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$ soll den Randabschnitt unter Dirichlet- und $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma$ denjenigen unter Neumann-Randbedingungen darstellen. Die beiden Grenzfälle $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma = \emptyset$ oder $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u = \emptyset$ repräsentieren reine Dirichlet- beziehungsweise reine Neumann-Randdaten. Analog zu den beiden vorigen Fällen übertragen sich die Randbedingungen vermöge des Ansatzes der asymptotischen Entwicklung auf die gesuchte Funktion $u_0(\mathbf{X})$ des homogenisierten Problems (4.12). Gemäß [68] existiert für alle $b(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$, $\bar{u}(\mathbf{X}) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u)$ und $\bar{t}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma)$ eine eindeutige Lösung in $H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$. Eine zusätzliche Kompatibilitätsbedingung ist nur für den Grenzfall reiner Neumann-Randdaten gemäß dem vorigen Absatz zu erfüllen.

Wir sehen, daß sich unterschiedliche Randbedingungen direkt auf das makroskopische Problem (4.12) übertragen lassen. Es stellt sich die entscheidende Frage: Konvergiert die Differenz $u_0(\mathbf{X}) - u^\varepsilon(\mathbf{X})$ aus homogenisierter und tatsächlicher Lösung für $\varepsilon \rightarrow 0$ betraglich genauso gegen Null wie im Fall homogener Dirichlet-Randbedingungen? In [33] werden für Probleme mit gemischten Randdaten, welche die Dirichlet- und Neumann-Probleme als Grenzfälle beinhalten, sowohl das schwache als auch das starke (Korrektur-)Konvergenzresultat aus dem letzten Paragraphen bewiesen.

Verallgemeinerung auf dreidimensionale Größen $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})$

Die Verallgemeinerung auf dreidimensionale vektorwertige Funktionen $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})$ geschieht konventionell, indem wir die bisher vorgestellte Theorie für $i = 1, 2, 3$ auf die drei Komponenten

$u_i^\varepsilon(\mathbf{X})$ anwenden. Mit gemischten Randdaten stellt sich das verallgemeinerte Modellproblem in Komponentenschreibweise wie folgt dar:

$$-\frac{\partial}{\partial X_j} \left(a_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial X_l} \right) = b_i \quad \text{in } \mathcal{R}_\mathcal{R}, \quad (4.18a)$$

$$u_i^\varepsilon = \bar{u}_i \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u, \quad (4.18b)$$

$$n_j a_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial X_l} = \bar{t}_i \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma, \quad (4.18c)$$

wobei $\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u \cap \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma = \emptyset$, $\partial \mathcal{R}_\mathcal{R} \setminus (\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u \cup \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma) = \text{Nullmenge}$, $\mathbf{b}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \mathbb{R}^3)$, $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u; \mathbb{R}^3)$ sowie $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma; \mathbb{R}^3)$ erfüllt sein und $\mathbf{n}(\mathbf{X})$ die Einheitsaußennormale an $\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma$ darstellen sollen. Ein wichtiger Unterschied zum skalarwertigen Problem (4.1) liegt in der höheren vierten Tensorstufe der Größe $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{X})$, welche für $i, j, k, l = 1, 2, 3$ durch $a_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{X}) := a_{ijkl}(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon})$ gegeben ist. Die geforderte $\mathcal{Y}_\mathcal{R}$ -Periodizität ändert sich im Vergleich zum skalarwertigen Problem nicht, wir müssen jedoch die bisherige Anforderung $\mathbf{A}(\mathbf{Y}) \in \mathfrak{M}^3(\alpha, \beta, \mathcal{Y}_\mathcal{R})$ durch $\mathbf{A}(\mathbf{Y}) \in \mathfrak{M}_e^3(\alpha, \beta, \mathcal{Y}_\mathcal{R})$ ersetzen.

Das homogenisierte Gesamtproblem ist im dreidimensionalen Fall gemäß [33] durch das mikroskopische Hilfsproblem

$$-\frac{\partial}{\partial Y_j} \left(a_{ijmn} \frac{\partial \chi_{mkl}}{\partial Y_n} \right) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial a_{ijkl}}{\partial Y_j} \quad \text{in } \mathcal{Y}_\mathcal{R}, \quad (4.19a)$$

$$\chi_{mkl} \text{ ist } \mathcal{Y}_\mathcal{R}\text{-periodisch} \quad (4.19b)$$

und das homogene makroskopische Problem

$$-\underbrace{\left[\frac{1}{|\mathcal{Y}_\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{Y}_\mathcal{R}} \left(a_{ijkl} - a_{ijmn} \frac{\partial \chi_{mkl}}{\partial Y_n} \right) d\mathbf{Y} \right]}_{=: a_{ijkl}^{\text{hom}}} \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial X_l \partial X_j} = b_i \quad \text{in } \mathcal{R}_\mathcal{R}, \quad (4.20a)$$

$$u_{0i} = \bar{u}_i \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u, \quad (4.20b)$$

$$n_j a_{ijkl} \frac{\partial u_{0k}}{\partial X_l} = \bar{t}_i \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma \quad (4.20c)$$

gegeben. Für (4.19) und (4.20) existieren eindeutige Lösungen $\chi(\mathbf{Y}) \in W_{\text{per}}(\mathcal{Y}_\mathcal{R}; \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3})$ und $\mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \mathbb{R}^3)$. Die aus dem eindimensionalen Fall bekannte schwache Konvergenzaussage gilt weiterhin, nachdem alle auftretenden Normen und Größen auf den dreidimensionalen Fall angepaßt worden sind.

Liegt $\mathbf{u}_0(\mathbf{X})$ in $C^2(\overline{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}; \mathbb{R}^3)$, so folgt mit dem Korrekturvektor $\theta_i := \chi_{kli} \frac{\partial u_{0k}}{\partial X_l}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ zusätzlich die starke Konvergenz $\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\theta}\|_{W(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$. Für den Fall einer zweimal stetig differenzierbaren homogenen Lösung $\mathbf{u}_0(\mathbf{X})$ muß für die Bestimmung des Korrekturterms also kein weiteres Hilfsproblem gelöst werden.

Einordnung in den Kontext der linearen dreidimensionalen Elastizität

Das verallgemeinerte Modellproblem (4.18) kann ohne weitere mathematische Umformungen für Probleme der linearen Elastizität verwendet werden. Es gelten die folgenden Zuordnungen:

- $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{X})$ – vorgegebener Koeffiziententensor mit $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ -periodischen Einträgen
- $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})$ – unbekanntes Verschiebungsfeld
- $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ – vorgegebene Volumenkräfte
- $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ – vorgegebene Verschiebungsranddaten
- $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X})$ – vorgegebene Spannungsranddaten

Probleme mit periodischen Randdaten und Volumenkräften der Form $\mathbf{b}^\varepsilon(\mathbf{X}) := \mathbf{b}\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$, $\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon(\mathbf{X}) := \bar{\mathbf{u}}\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ oder $\bar{\mathbf{t}}^\varepsilon(\mathbf{X}) := \bar{\mathbf{t}}\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Die gängigen kontinuumsmechanischen Anwendungen erfordern diese spezielle Eigenschaft nicht.

Die mechanische Größe der *Cauchyspannung* $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{X})$ ist bei der linearen Elastizität bekannterweise durch

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial X_l} \quad (4.21)$$

gegeben. Analog dazu wird der homogenisierte makroskopische Wert $\boldsymbol{\sigma}_M(\mathbf{X}) := \boldsymbol{\sigma}^{hom}(\mathbf{X})$ durch $\sigma_{Mij} := \sigma_{ij}^{hom} = a_{ijkl}^{hom} \frac{\partial u_{0k}}{\partial X_l}$ definiert. Im nächsten Abschnitt über den asymptotischen Ansatz bei elastisch-viskoplastischen Problemen werden wir direkt mit der Cauchyspannung arbeiten.

4.2 Asymptotische Entwicklung für Elasto-Viskoplastizität und kleine Deformationen

Allgemeines mathematisches Modellproblem mit Dirichlet-Randdaten

Für die mathematische Beschreibung von Elasto-Viskoplastizität für kleine Deformationen richten wir uns in der Theorie und Notation nach [1] und [2], welche beide in [3] für die Betrachtung von periodischen Mikrostrukturen mit dem Parameter ε erweitert werden. Aufgrund der auftretenden Viskosität betrachten wir momentane Größen $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$, $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_t$ und bezeichnen die neu hinzukommende Zeit mit der zusätzlichen Variable $t \in [0, \infty)$. Für den Zeitpunkt $t = 0$ indentifizieren wir \mathcal{R}_t mit $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$. Das Modellproblem ist durch die Gleichungen

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{b} \quad \text{in } \mathcal{R}_t, \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t, \quad (4.22b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{A}^\varepsilon : (\mathbf{E}_e^\varepsilon - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon), \quad (4.22c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\varepsilon}{\partial t} \in \tilde{\mathfrak{F}}, \quad (4.22d)$$

$$\mathbf{z}^\varepsilon = \mathbf{z}^{(0)} \quad \text{in } \mathcal{R}_t \text{ für } t = 0 \text{ und damit in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}} \quad (4.22e)$$

gegeben, wobei wir die Größen aus dem letzten Abschnitt gemäß $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right)$ zeitlich anpassen und zusätzlich die folgenden Zuordnungen und Bezeichnungen verwenden:

- \mathbf{E}_e^ε – linearisiertes elastisches Verzerrungsmaß mit $\mathbf{E}_e^\varepsilon := \mathbf{E}_e(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon)$ und $\mathbf{E}_e(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T)$
- $\mathbf{z}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ – unbekannter Vektor aller inneren Variablen mit N Komponenten
- $\mathbf{P}(\mathbf{z})$ – vorgegebene lineare Abbildung von \mathbb{R}^N nach \mathcal{M}_{sym}^3 , welche insbesondere die plastische Verzerrung \mathbf{E}_p^ε aus den inneren Variablen gemäß $\mathbf{E}_p^\varepsilon := \mathbf{E}_p(\mathbf{z}^\varepsilon) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ berechnet
- $\tilde{\mathfrak{F}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{E}_e^\varepsilon, \mathbf{z}^\varepsilon\right)$ – Menge derjenigen Funktionen, welche von $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{M}_{sym}^3 \times \mathbb{R}^N$ in die Potenzmenge von \mathbb{R}^N abbilden und die möglichen Evolutionen der inneren Variablen $\mathbf{z}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ beschreiben

In echten elasto-viskoplastischen und damit ratenabhängigen Materialmodellen kann das mengentheoretische Enthaltenseinsymbol in $\frac{\partial \mathbf{z}^\varepsilon}{\partial t} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ durch das gewöhnliche Gleichheitszeichen ersetzt werden, wodurch eine feste Geschwindigkeitsbeziehung definiert wird. Da jedoch bei ratenunabhängigen elasto-plastischen Modellen für einen fest gewählten Versuch unter verschiedenen Durchlaufgeschwindigkeiten am Ende stets dieselben plastischen Größen entstehen müssen, können die Geschwindigkeiten $\frac{\partial \mathbf{z}^\varepsilon}{\partial t}$ nicht fest vorgegeben werden. Vielmehr muß in die-

sem Fall stets eine ganze Menge möglicher Werte existieren, von denen einer die für die aktuell gewählte Geschwindigkeit passende Lösung darstellt.

Einschränkung auf quadratische positiv definite Potentiale und Materialgleichungen monotonen Typs gemäß [3]

Die Einschränkung auf kleine Deformationen garantiert für das Modellproblem (4.22) zunächst keine mathematische Existenz- und Eindeigkeitstheorie für den asymptotischen Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$. Vielmehr müssen wir zusätzliche Annahmen bezüglich der verwendeten Größen und damit bezüglich der zugrunde liegenden Physik machen. Wir werden sehen, daß diese neuen Anforderungen eine Existenz- und Eindeigkeitstheorie zwar ermöglichen, aber gleichzeitig die Anwendbarkeit auf beliebige elasto-viskoplastische Modelle stark einschränken: Viele aktuelle komplexere Modelle entsprechen diesen Anforderungen nicht.

Die erste Einschränkung betrifft die Betrachtung von hyperelastischer Viskoplastizität mit der quadratischen positiv definiten freien Energiefunktion

$$\psi(\mathbf{y}, \mathbf{E}_\varepsilon, \mathbf{z}^\varepsilon) = \frac{1}{2} [\mathbf{A} : (\mathbf{E}_\varepsilon - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon)] : (\mathbf{E}_\varepsilon - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon) + \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon) \cdot \mathbf{z}^\varepsilon, \quad (4.23)$$

wobei die Bedingungen $\mathbf{A}(\mathbf{y}) \in \mathfrak{M}_\varepsilon^3(\alpha, \beta, \mathcal{Y}_t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ ist \mathcal{Y}_t -periodisch und meßbar, $\mathbf{Q}(\mathbf{y})$ ist vom Typ $\mathcal{M}_{>0}^3$, $\mathbf{Q}(\mathbf{y})$ ist \mathcal{Y}_t -periodisch und meßbar gelten sollen. Potentiale dieser speziellen Form erfüllen stets den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Die Funktion $\mathbf{Q}(\mathbf{y})$ repräsentiert die kinematische Verfestigung des jeweiligen Materialmodells. Oft wird $\mathbf{Q}(\mathbf{y}) = k(\mathbf{y})\mathbf{I}$ verwendet. Modelle ohne kinematische Verfestigung, das heißt mit $k(\mathbf{y}) \equiv 0$, bereiten in den Eindeigkeitsbeweisen der Lösung Probleme.

Die zweite Einschränkung betrifft die Anforderung, daß sich $\tilde{\mathfrak{F}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{E}_\varepsilon, \mathbf{z}^\varepsilon\right)$ für jedes $\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \in \mathcal{R}_t$ als eine im zweiten Argument *monotone* Funktion $\tilde{\mathfrak{F}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{P}^T : \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon\right)$ darstellen läßt. Monotonie bedeutet in diesem Fall, daß für alle $\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \in \mathcal{R}_t$ die Beziehung $\tilde{\mathfrak{F}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{v} \geq 0$ erfüllt ist, sofern \mathbf{v} im Definitionsbereich von $\tilde{\mathfrak{F}}$ liegt.

Zusammengenommen bezeichnen wir solche Modelle als *Modelle monotonen Typs*. Leider entsprechen nur wenige elasto-viskoplastische Modelle diesen Voraussetzungen. So gehört beispielsweise das bekannte ratenunabhängige elasto-plastische *Prandtl-Reuss-Modell* oder das ratenabhängige elasto-viskoplastische *Maxwell-Norton-Modell* zu dieser Klasse. Diese und weitere Modelle werden in [1] genauer untersucht, und der Autor stellt spezielle *Transformationstechniken* vor, mit denen manche nichtmonotone elasto-viskoplastische Probleme in Probleme monotonen Typs überführt werden können. Dennoch läßt sich auch diese Technik für die meisten der aktuellen Modelle (noch) nicht anwenden. Wir möchten die Homogenisierung von Problemen

monotonen Typs trotzdem knapp diskutieren. Unter den getroffenen Voraussetzungen können wir das Modellproblem (4.22) konkreter schreiben als

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{b} \quad \text{in } \mathcal{R}_t, \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t, \quad (4.24b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{A}^\varepsilon : \left(\mathbf{E}_e^\varepsilon - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon \right), \quad (4.24c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\varepsilon}{\partial t} \in \mathfrak{F} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{P}^T : \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}^\varepsilon \right), \quad (4.24d)$$

$$\mathbf{z}^\varepsilon = \mathbf{z}^{(0)} \quad \text{in } \mathcal{R}_t \text{ für } t = 0. \quad (4.24e)$$

Eine Verallgemeinerung auf Probleme monotonen Typs mit positiv *semidefiniten* freien Energien unter (spezielleren) homogenen Dirichlet-Randdaten wird in [65] diskutiert, in dieser Arbeit jedoch nicht weiter behandelt.

Homogenisierte Lösung des Modellproblems monotonen Typs mit Dirichlet-Randdaten

Beim Ansatz der asymptotischen Entwicklung für Elasto-Viskoplastizität brechen wir die Reihenentwicklung im Gegensatz zum linear-elastischen Fall nicht nach dem dritten Summanden ab, sondern nehmen die folgende Näherung der tatsächlichen Lösung an:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{u}_1 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t \right), \quad (4.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \approx \boldsymbol{\sigma}_0 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t \right), \quad (4.26)$$

$$\mathbf{z}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{z}_0 \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t \right), \quad (4.27)$$

wobei \mathbf{u}_1 , $\boldsymbol{\sigma}_0$ und \mathbf{z}_0 im zweiten Argument \mathcal{Y}_t -periodisch sein sollen. Im Gegensatz zu den nichtperiodischen Randdaten $\bar{\mathbf{u}}$ nehmen wir die Anfangsdaten $\mathbf{z}^{(0)}$ mit $\mathbf{z}^{(0)}(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} \mathbf{z}_0^{(0)} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$ ebenfalls als \mathcal{Y}_t -periodisch im zweiten Argument an. Laut [2] führt dieser Ansatz mit der Umwandlung $\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{y}$ zum mikroskopischen Hilfsproblem

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}_0 = 0 \quad \text{in } \mathcal{Y}_t, \quad (4.28a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{A} : \left(\mathbf{E}_e(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_0 + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}_0 \right), \quad (4.28b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}_0}{\partial t} \in \mathfrak{F} \left(\mathbf{y}, \mathbf{P}^T : \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}_0 \right), \quad (4.28c)$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0^{(0)} \quad \text{in } \mathcal{R}_t \times \mathcal{Y}_t \text{ für } t = 0. \quad (4.28d)$$

und dem zugehörigen makroskopischen Problem

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_M = \mathbf{b} \quad \text{in } \mathcal{R}_t, \quad (4.29a)$$

$$\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t, \quad (4.29b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \frac{1}{|\mathcal{Y}_t|} \int_{\mathcal{Y}_t} \boldsymbol{\sigma}_0 \, dy, \quad (4.29c)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}_M(\mathbf{x}, t)$ die homogenisierte Cauchyspannung darstellt, welche durch Volumenmittelung der mikroskopischen Cauchyspannung über der Referenzeinheitszelle ermittelt wird.

Im Gegensatz zur linearen Elastizität ist im elastisch-viskoplastischen Fall keine strikte Trennung zwischen den beiden Variablen \mathbf{x} und \mathbf{y} möglich. Für feste $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$ bezeichnen wir Problem (4.28) auch als das *Zellenproblem*. Wir erkennen, daß sich numerische Ergebnisse nur durch gekoppeltes Lösen beider Teilprobleme erzielen lassen, da makroskopische Spannungen nur mit Kenntnis der mikroskopischen Werte berechnet werden können und das Zellenproblem im Gegenzug stets die aktuelle makroskopische Deformation auferlegt bekommt. Im Vergleich zum linearen Fall, bei dem das Hilfsproblem vor der gesamten makroskopischen Rechnung separat gelöst werden kann, impliziert dies höhere Hardware-Anforderungen und führt im schlimmsten Fall zu sehr viel längeren Rechenzeiten.

Existenz und Eindeutigkeit der homogenisierten Lösung

Die Voraussetzungen, welche für die Lösbarkeit von (4.28) und (4.29) neben den allgemeinen Definitionen von \mathcal{R}_t und \mathcal{Y}_t erfüllt werden müssen, sind im Vergleich zum homogenisierten dreidimensionalen linearen Elastizitätsproblem (4.19) und (4.20) zahlreicher und lauten zusammengefaßt wie folgt:

- $\partial \mathcal{R}_t$ ist C^1
- Es gibt einen festen Endzeitpunkt $t_E < +\infty$ mit $0 \leq t \leq t_E$
- $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{y})$ ist beschränkt, meßbar und \mathcal{Y}_t -periodisch
- $\mathbf{A}(\mathbf{y}) : \mathcal{M}_{sym}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{sym}^3$ ist positiv definit
- \mathbf{Q} ist positiv definit,
- $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathfrak{Pot}(\mathbb{R}^N)$ erfüllt die vier Bedingungen
 - i.) $\mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ist für jedes $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ bezüglich \mathbf{y} \mathcal{Y}_t -periodisch

ii.) $0 \in \mathfrak{F}(\mathbf{x}, 0)$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

iii.) $\mathbf{z} \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ist für jedes (feste) $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ maximal monoton

Monotonie: $(\mathfrak{F}^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1) - \mathfrak{F}^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_2)) \cdot (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) \geq 0$ für alle $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^N$ und jedes Bild $\mathfrak{F}^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_i) \in \mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_i) \in \mathfrak{Pot}(\mathbb{R}^N)$,

maximale Monotonie: $\mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ist monoton und aus $(\mathfrak{F}^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1) - \mathbf{z}_2^*) \cdot (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) \geq 0$ für alle $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^N$ und $\mathfrak{F}^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1) \in \mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$ folgt mit $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2^* \in \mathbb{R}^N$ auch $\mathbf{z}_2^* \in \mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_2)$

iv.) $\mathbf{y} \rightarrow j_{\lambda, \mathbf{y}}(\mathbf{z}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist für alle $\lambda > 0$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ meßbar, wobei $j_{\lambda, \mathbf{y}}(\mathbf{z}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ die aufgrund der maximalen Monotonie von \mathfrak{F} existierende Inverse der Funktion $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z} + \lambda \mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ darstellt

- $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \in W^{2,1}([0, t_E]; L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3))$
- $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \in W^{2,1}([0, t_E]; H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3))$
- $\mathbf{z}_0^{(0)}(\mathbf{x}, t) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^N)$
- Es gibt ein $\xi(\mathbf{x}, t) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^N)$ mit $\xi(\mathbf{x}, t) \in \mathfrak{F}(\mathbf{y}, \mathbf{P}^T : \boldsymbol{\sigma}_0^{lin} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}_0^{(0)})$ fast überall in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_0^{lin}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zur schwachen Lösung des linearen Problems

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}_0^{lin} = 0 \quad \text{in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0^{lin} = \mathbf{A} : \left(\mathbf{E}_e(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_0^{lin}) + \mathbf{E}_e(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1^{lin}) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}_0^{(0)} \right),$$

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_M^{lin} = \mathbf{b}^{lin} \quad \text{in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}},$$

$$\mathbf{u}_0^{lin} = \bar{\mathbf{u}}^{lin} \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_M^{lin} = \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \boldsymbol{\sigma}_0^{lin} d\mathbf{Y},$$

gehören soll, welches gemäß [3] für $\mathbf{b}^{lin}(\mathbf{x}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\mathbf{b}^{lin}(\mathbf{x}) := \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)|_{t=0}$, $\bar{\mathbf{u}}^{lin}(\mathbf{x}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\bar{\mathbf{u}}^{lin}(\mathbf{x}) := \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)|_{t=0}$ und $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{z}_0^{(0)})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathcal{M}_{sym}^3)$ eine eindeutige schwache Lösung $(\mathbf{u}_0^{lin}(\mathbf{x}), \mathbf{u}_1^{lin}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \boldsymbol{\sigma}_0^{lin}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \boldsymbol{\sigma}_M^{lin}(\mathbf{x}))$ besitzt. Siehe dazu auch den letzten Abschnitt über lineare Elastizität, wobei wir dort $\mathbf{u}_1^{lin}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nicht explizit benutzt haben.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es für das homogenisierte Problem (4.28) und (4.29) für jedes endliche $t_E > 0$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{z}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_M)$. Dabei gelten

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \in L^2([0, t_E]; H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)),$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times [0, t_E]; W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)),$$

$\mathbf{z}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in C\left([0, t_E]; L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^N)\right)$ und $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch in \mathbf{y} ,

$\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \times [0, t_E]; \mathcal{M}_{sym}^3\right)$ und $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch in \mathbf{y} ,

$\boldsymbol{\sigma}_M(\mathbf{x}, t) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times [0, t_E]; \mathcal{M}_{sym}^3\right)$.

Konvergenz der homogenisierten Lösung

Die asymptotische Konvergenz der homogenisierten gegen die tatsächliche Lösung läßt sich gemäß [3] nur unter stärkeren Voraussetzungen garantieren. Dort müssen zusätzlich zu den bereits genannten Anforderungen der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage die folgenden Kriterien erfüllt sein:

- $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ ist vom Typ C^3 , es gibt also eine lokale Parametrisierung von $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$, welche dreimal stetig differenzierbar ist
- $\mathfrak{F} \in C^3\left(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N\right)$ und $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch in \mathbf{y}
- $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \in C^3\left(\overline{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \times [0, \infty); \mathbb{R}^3\right)$
- $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \in C^3\left(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times [0, \infty); \mathbb{R}^3\right)$
- $\mathbf{z}_0^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^3\left(\overline{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^N\right)$ und $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch in \mathbf{y}
- $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{y})$ ist auf $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ dreimal stetig differenzierbar, wodurch für alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$ die Beziehung $A_{ijkl} \in C_{per}^3(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ gilt

Unter diesen Voraussetzungen existiert ein endlicher Zeitpunkt $t_R \geq 0$, so daß für alle $0 \leq t \leq t_R$ die folgende asymptotische Konvergenzaussage erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left\| \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \right\|_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} + \left\| \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}_0\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \right\|_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \\ & + \left\| \mathbf{z}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \mathbf{z}_0\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \right\|_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wir erkennen, daß sich für Elasto-Viskoplastizität und kleine Deformationen im Gegensatz zur linearen Elastizität eine eindeutige, asymptotisch konvergente Lösung nur unter starken und für konkrete Materialmodelle teilweise schwer nachprüfbaren Regularitätsanforderungen gewinnen läßt.

5 Methode der Zweiskalenkonvergenz für klassische Kontinua

5.1 Übersicht, Sätze und Definitionen

Die mathematische Theorie der sogenannten *Zweiskalenkonvergenz* für Funktionen aus L^2 -Räumen wurde in den frühen 90er-Jahren des letzten Jahrhunderts von G. Allaire entwickelt. Seine Ideen, welche auf der Veröffentlichung [66] beruhen, stellt Allaire in [4] vor. In [5] faßt er seinen Ansatz gemeinsam mit weiteren mathematischen Homogenisierungstheorien zusammen, so daß der interessierte Leser einen abstrakten Eindruck der mathematischen Homogenisierung gewinnen kann. Um eine genauere und umfassendere Darstellung der Grundlagen ist das Buch [20] bemüht. Neben weiteren mathematischen Homogenisierungstheorien werden dort der Ansatz der asymptotischen Entwicklung und die Methode der Zweiskalenkonvergenz in einem funktionalanalytischen Rahmen behandelt und die wichtigen Lagebeziehungen der verschiedenen L^p - und Sobolev-Räume dargestellt. Eine Verallgemeinerung von Allaires Zweiskalentheorie auf beliebige L^p -Räume wird in [53] gegeben. Sofern nicht anders angedeutet, sollen Ω und \mathscr{Y} in diesem Abschnitt wie in Definition 2 verstanden werden.

Fundamentallemma der Variationsrechnung und Hölderungleichung

Satz 10 (Fundamentallemma der Variationsrechnung, [15], Lemma 3.22)

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (hier nur) offen und $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Gilt für alle $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ die Beziehung

$$\int_{\Omega} f(x)\psi(x) dx = 0, \quad (5.1)$$

so folgt daraus $f = 0$ fast überall auf Ω . Genauso folgt aus

$$\int_{\Omega} f(x)\psi(x) dx \geq 0 \quad (5.2)$$

für alle $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\psi \geq 0$ die Beziehung $f \geq 0$ fast überall auf Ω .

Satz 11 (Verallgemeinerte Hölderungleichung, [22], Seite 104)

Es seien $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar für alle $i = 1, \dots, m$ sowie p_1, \dots, p_m und r positive Zahlen mit $\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$, wobei die Wahl $p_i = \infty$ zulässig ist. Dann gilt für $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\left\| \prod_{i=1}^m f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i} \quad (5.3)$$

und es ist $(\prod_{i=1}^m f_i) \in L^r(\Omega)$.

Skalentrennung bei zweiskaligen Variationen

Satz 12 (Variationen und Mehrfachintegrale)

Es seien $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $f(x, y) \in L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$. Dann sind äquivalent:

$$(i) \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{W}} f(x, y) \delta(x, y) dy dx = 0 \quad \text{für alle } \delta(x, y) \in L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W}), \quad (5.4)$$

$$(ii) \int_{\mathcal{W}} f(x, y) \tilde{\delta}(y) dy = 0 \quad \text{für alle } \tilde{\delta}(y) \in L^2(\mathcal{W}) \text{ fast überall in } \mathcal{V}. \quad (5.5)$$

Im Kontext der Zweiskalenkonvergenz für kontinuumsmechanische Probleme können beispielsweise die Zuordnungen $\mathcal{V} := \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ und $\mathcal{W} := \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ verwendet werden.

Anmerkung 13

Für die Wahl $\mathcal{V} := \Omega$ und $\mathcal{W} := \mathcal{Y}$ gilt Satz 12 bereits für $\delta(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$, da $L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$ dicht in $L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$ liegt. Genauso ist der Satz für die klassische Wahl $\delta(x, y) \in C_0^\infty(\Omega \times \mathcal{Y})$ gültig.

Beweis von Satz 12:

(i) \Rightarrow (ii) : Aus Beziehung (i) folgt insbesondere für alle multiplikativen Zerlegungen $\delta(x, y) = \delta^x(x) \delta^y(y)$ mit $\delta^x(x) \in L^2(\mathcal{V})$ und $\delta^y(y) \in L^2(\mathcal{W})$ die Darstellung

$$\int_{\mathcal{V}} \delta^x(x) \int_{\mathcal{W}} f(x, y) \delta^y(y) dy dx = 0 \quad (5.6a)$$

$$\forall \delta^x(x) \in L^2(\mathcal{V}), \forall \delta^y(y) \in L^2(\mathcal{W}). \quad (5.6b)$$

Man beachte dabei, daß das Produkt $\delta^x(x) \delta^y(y)$ tatsächlich in $L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ liegt, was mit dem Satz von Fubini für lebesgue-integrierbare Funktionen gezeigt werden kann. Gemäß dem Fundamentallemma der Variationsrechnung und dem Wissen, daß $C_0^\infty(\mathcal{V})$ dicht in $L^2(\mathcal{V})$ liegt, folgt daraus

$$\int_{\mathcal{W}} f(x, y) \delta^y(y) dy = 0 \quad (5.7a)$$

$$\forall \delta^y(y) \in L^2(\mathcal{W}) \text{ fast überall in } \mathcal{V}. \quad (5.7b)$$

(ii) \Rightarrow (i) : Wir beweisen diese Richtung durch Widerspruch. Es existiere dazu ein $\bar{\delta}(x, y) \in L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ mit

$$\int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{W}} f(x, y) \bar{\delta}(x, y) dy dx \neq 0. \quad (5.8)$$

Aus der Annahme (ii) folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Beziehung $f(x, y) = 0$ fast überall in $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ und damit insbesondere $\|f(x, y)\|_{L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W})} = 0$. Mithilfe der Hölderungleichung folgt die Abschätzung

$$0 < \|f(x, y) \bar{\delta}(x, y)\|_{L^1(\mathcal{V} \times \mathcal{W})} \stackrel{(\text{Hölder})}{\leq} \|f(x, y)\|_{L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W})} \|\bar{\delta}(x, y)\|_{L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W})} = 0. \quad (5.9)$$

Widerspruch. Damit kann ein solches $\bar{\delta}(x, y)$ in $L^2(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ nicht existieren. \square

Zulässige Testfunktionen

Definition 14 (Zulässige Testfunktion, G. ALLAIRE [4], Definition 1.4)

Eine im zweiten Argument \mathcal{Y} -periodische Funktion $\psi(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$ heißt zulässige Testfunktion, falls die Konvergenzeigenschaft

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} |\psi(x, y)|^2 dy dx \quad (5.10)$$

erfüllt ist.

Satz 15 (Zulässige Testfunktionen I, [53], Theorem 4)

Für alle $1 \leq p < +\infty$ gilt für jede Funktion $\psi(x, y) \in L^p(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$ die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^p dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} |\psi(x, y)|^p dy dx. \quad (5.11)$$

Damit sind insbesondere alle Funktionen aus $L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$ zulässige Testfunktionen.

Satz 16 (Zulässige Testfunktionen II, [4], Lemma 5.6)

Jede Funktion $\psi(x, y) \in C_0(\Omega; L_{per}^{\infty}(\mathcal{Y}))$ ist eine zulässige Testfunktion.

Satz 17 (Zulässige Testfunktionen III, [20], Bemerkung 9.4)

Jede Funktion $\psi(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$, welche sich als ein Produkt $\psi_1(x) \cdot \psi_2(y)$ mit $\psi_1(x) \in L^p(\Omega)$

und $\psi_2(y) \in L_{per}^q(\mathcal{Y})$ unter den beiden Voraussetzungen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ und $1 \leq p \leq +\infty$ darstellen läßt, ist eine zulässige Testfunktion.

Zweiskalenkonvergenz

Definition 18 (Zweiskalenkonvergenz, D. LUKKASSEN ET AL. [53], Definition 6)

Sei $\{f^\varepsilon\}$ eine Folge in $L^2(\Omega)$. $\{f^\varepsilon\}$ konvergiert zweiskalig gegen ein $f_0(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$, falls für alle $\psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f^\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f_0(x, y) \psi(x, y) dy dx . \quad (5.12)$$

In diesem Fall schreiben wir $f^\varepsilon \xrightarrow{\text{zweiskalig}} f_0$.

Anmerkung 19

Eine zweiskalenkonvergente Folge $\{f^\varepsilon\} \in L^2(\Omega)$ erfüllt die Konvergenzbeziehung (5.12) mit jeder zulässigen Testfunktion $\psi(x, y)$ [4, Bemerkung 9.4].

Satz 20 (Hauptsatz der Zweiskalenkonvergenz, G. ALLAIRE [4], Theorem 1.2)

Es sei $\{f^\varepsilon\}$ eine beschränkte Folge in $L^2(\Omega)$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{f^{\varepsilon'}\}$ von $\{f^\varepsilon\}$ und ein $f_0 \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$, sodaß $\{f^{\varepsilon'}\}$ zweiskalig gegen f_0 konvergiert.

Satz 21 (Zweiskalenkonvergenz zulässiger Testfunktionen I, [34], Lemma 2.2, Theorem 2.2)

Es sei $\psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$. Dann gilt $\psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \psi(x, y)$.

Korollar 22 (Zweiskalenkonvergenz zulässiger Testfunktionen II)

Es sei $\psi(x, y)$ eine beliebige zulässige Testfunktion. Dann gilt $\psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \psi(x, y)$.

Beweis von Korollar 22:

Neben der beliebig gewählten zulässigen Testfunktion $\psi(x, y)$ betrachten wir zusätzlich eine beliebige Funktion $\tilde{\psi}(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$. Gemäß Satz 21 konvergiert die Folge $\left\{\tilde{\psi}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\}$ zweiskalig gegen sich selbst und gemäß Anmerkung 19 erfüllt sie die Konvergenzbeziehung (5.12) auch mit der gewählten zulässigen Testfunktion ψ . Damit gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \tilde{\psi}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \tilde{\psi}(x, y) \psi(x, y) dy dx . \quad (5.13)$$

Unter dem Integral können die beiden Funktionen wie folgt vertauscht werden:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \tilde{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \psi(x, y) \tilde{\psi}(x, y) dy dx . \quad (5.14)$$

Diese Gleichung gilt bei festem ψ gemäß ihrer Konstruktion für alle $\tilde{\psi}(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$, womit Definition 18 für die Folge $\{\psi^\varepsilon(x)\} := \{\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\}$ erfüllt ist. Es folgt $\psi^\varepsilon \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \psi$.

□

Satz 23 (Schwache Konvergenz, G. ALLAIRE [4], Proposition 1.6)

Im Raum $L^2(\Omega)$ sei eine Folge $\{f^\varepsilon\}$ gegeben, welche zweiskalig gegen $f_0(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$ konvergiere. Dann ist $\{f^\varepsilon\}$ eine beschränkte Folge, welche schwach gegen den Grenzwert

$$f(x) := \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f_0(x, y) dy \in L^2(\Omega) \quad (5.15)$$

konvergiert. Es gilt also für alle $\psi(x) \in L^2(\Omega)$ die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f^\varepsilon(x) \psi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx , \quad (5.16)$$

da der Dualraum von $L^2(\Omega)$ wieder $L^2(\Omega)$ ist.

Anmerkung 24

Allaires ursprüngliche Definition der Zweiskalenkonvergenz setzt zulässige Funktionen $\psi(x, y)$ aus dem im Vergleich zu $L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$ kleineren Raum $D(\Omega; C_{per}^\infty(\mathcal{Y}))$ voraus. Damit wäre Satz 23 allerdings nur dann gültig, wenn zusätzlich die Beschränktheit der Folge $\{f^\varepsilon\}$ garantiert ist. In [53] ist als Gegenbeispiel eine unbeschränkte Funktionenfolge aufgeführt, welche auf der einen Seite für alle $\psi(x, y) \in D(\Omega; C_{per}^\infty(\mathcal{Y}))$ zweiskalig konvergiert, auf der anderen Seite aber einen schwachen Grenzwert besitzt, welcher nicht durch die \mathcal{Y} -Volumenmittelung des vorliegenden Zweiskalengrenzwertes gegeben ist.

Satz 25 (Produktkonvergenz, G. ALLAIRE [4], Theorem 1.8)

Es sei $\{f^\varepsilon\}$ eine Folge in $L^2(\Omega)$, welche zweiskalig gegen ein $f_0 \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$ konvergiert. Weiter erfülle $\{f^\varepsilon\}$ die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [f^\varepsilon(x)]^2 dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} [f_0(x, y)]^2 dy dx . \quad (5.17)$$

Dann folgt für jede weitere Folge $\{g^\varepsilon\} \in L^2(\Omega)$, welche gegen ein $g_0 \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$ zweiskalig konvergiert, daß die Produktfolge $\{f^\varepsilon g^\varepsilon\}$ in $D'(\Omega)$ schwach gegen das über das Volumen \mathcal{Y} gemittelte Produkt der einzelnen Zweiskalengrenzwerte konvergiert. Es gilt also für alle $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (f^\varepsilon(x) g^\varepsilon(x)) \psi(x) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f_0(x, y) g_0(x, y) dy \right) \psi(x) dx, \quad (5.18)$$

da $C_0^\infty(\Omega)$ der Dualraum von $D'(\Omega)$ ist.

Satz 26 (Konvergenz des Gradienten, G. ALLAIRE [5], Theorem 3.5)

Es sei $\{f^\varepsilon\}$ eine beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$. Dann konvergieren $\{f^\varepsilon\}$ und $\{\nabla f^\varepsilon\}$ bis auf eine Teilfolge zweiskalig gegen $f_0 \in H^1(\Omega)$ und $\nabla f_0 + \nabla_y f_1$ für ein $f_1 \in L^2(\Omega; W_{per}(\mathcal{Y}))$. Insbesondere hängt der Zweiskalengrenzwert f_0 nur von x ab.

Korollar 27 (Konvergenz der partiellen Ableitung)

Es sei $\{f^\varepsilon\}$ eine beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$. Dann gilt für ein beliebiges, aber festes $k = 1, 2, 3$ bis auf eine Teilfolge für alle $\psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$ die zweiskalige Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_k}(x) \right) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x, y) \right) \psi(x, y) dy dx, \quad (5.19)$$

wobei $f_0 \in H^1(\Omega)$ und $f_1 \in L^2(\Omega; W_{per}(\mathcal{Y}))$ sind.

Beweis von Korollar 27:

Nach Satz 26 gilt für alle $\tilde{\psi} \in L^2(\Omega; [C_{per}(\mathcal{Y})]^n)$ mit den Komponenten $\tilde{\psi}_i \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y}))$ für $i = 1, 2, 3$ die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right) \tilde{\psi}_i(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x, y) \right) \tilde{\psi}_i(x, y) dy dx. \quad (5.20)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei nun $k = 1, 2, 3$ beliebig aber fest gewählt. Wir betrachten diejenigen Funktionen $\tilde{\psi}$, deren Komponenten $\tilde{\psi}_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $i \neq k$ gleich Null sind. Mit der Bezeichnung $\psi := \tilde{\psi}_k$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_k}(x) \right) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right) \tilde{\psi}_i(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x, y) \right) \tilde{\psi}_i(x, y) dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x, y) \right) \psi(x, y) dy dx \\
&\quad \forall \psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathcal{Y})), \tag{5.21}
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Satz 28 (Konvergenz der Divergenz, N. SVANSTEDT & N. WELLANDER, Theorem 4)

In diesem Satz wird der \mathbb{R}^n für den konkreten Fall $n = 3$ betrachtet. Es sei $\{f^\varepsilon\}$ eine beschränkte Folge in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, deren Divergenz $f^\varepsilon \cdot \nabla$ für jedes $\varepsilon > 0$ in $L^2(\Omega)$ liege. Dann konvergiert $\{f^\varepsilon \cdot \nabla\}$ zweiskalig gegen $f^M \cdot \nabla + f_1 \cdot \nabla_y$. Dabei gelten $f^M(x) := \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f_0(x, y) dy \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ für den Zweiskalengrenzwert $f_0(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y}; \mathbb{R}^3)$ von $\{f^\varepsilon\}$ und $f_1(x, y) \in L^2(\Omega; W_{per}(\mathcal{Y})^3)$.

Satz 29 (Über die Divergenz des Zweiskalengrenzwertes)

Es sei $\{f^\varepsilon\}$ eine beschränkte Folge in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ und $f^0(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y}; \mathbb{R}^{n \times n})$ ihr Zweiskalengrenzwert. Weiter existiere für jedes $\varepsilon > 0$ die Divergenz $f^\varepsilon \cdot \nabla \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, und die Divergenzenfolge $\{f^\varepsilon \cdot \nabla\}$ sei beschränkt. Dann erfüllt f^0 die Gleichung $f^0 \cdot \nabla_y = 0$ fast überall in $\Omega \times \mathcal{Y}$.

Beweis von Satz 29:

Für alle zulässigen Funktionen $\psi \in L^2(\Omega; [C_{per}(\mathcal{Y})]^{n \times n})$ gilt die Zweiskalenkonvergenz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f^\varepsilon : \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f^0 : \psi(x, y) dy dx. \tag{5.22}$$

Mit dem Wissen, daß wegen $C_0^\infty(\mathcal{Y}) \subset C_{per}^\infty(\mathcal{Y})$ auch die Beziehung $C_0^\infty(\Omega \times \mathcal{Y}; \mathbb{R}^n) \subset C_0^\infty(\Omega; [C_{per}^\infty(\mathcal{Y})]^n)$ erfüllt ist, betrachten wir für beliebige Funktionen $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega \times \mathcal{Y}; \mathbb{R}^n)$ die nachfolgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} (f^\varepsilon \cdot \nabla) \cdot \tilde{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\psi} \cdot f^\varepsilon) \cdot \nabla dx - \int_{\Omega} f^\varepsilon : \nabla \tilde{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left\{ \int_{\partial \Omega} \tilde{\psi} \cdot f^\varepsilon \cdot n dx - \int_{\Omega} f^\varepsilon : \nabla \tilde{\psi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right\} \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} f^\varepsilon : \left(\nabla_x \tilde{\psi}(x, y) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \tilde{\psi}(x, y) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right) dx \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} f^\varepsilon : \nabla_x \tilde{\psi}(x, y) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} dx
\end{aligned}$$

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f^{\varepsilon} : \nabla_y \tilde{\psi}(x, y) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} dx \quad (5.23)$$

mit der äußeren Einheitsnormalen n an $\partial\Omega$. Das Oberflächenintegral im zweiten Schritt fällt aufgrund der Wahl von $\tilde{\psi}$ weg und in der darauf folgenden Zeile wird die Differentiationsregel (4.3) angewendet.

Beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ ergeben die linke Seite von (5.23) und der erste Summand der rechten aufgrund der Beschränktheit des Gradienten den Wert Null. Im zweiten Summanden der rechten Seite erfüllt der Gradient $\nabla_y \tilde{\psi}(x, y)$ die Lagebeziehung $\nabla_y \tilde{\psi} \in C_0^\infty\left(\Omega; \left[C_{per}^\infty(\mathcal{Y})\right]^{n \times n}\right) \subset L^2\left(\Omega; \left[C_{per}(\mathcal{Y})\right]^{n \times n}\right)$ und ist damit eine zulässige Testfunktion für die Zweiskalenkonvergenz von $\{f^\varepsilon\}$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt demnach aus (5.23) unter erneuter Anwendung der partiellen Integration die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} f^0 : \nabla_y \tilde{\psi}(x, y) dy dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\partial\mathcal{Y}} \tilde{\psi}(x, y) \cdot f^0 \cdot n_y dy dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} (f^0 \cdot \nabla_y) \cdot \tilde{\psi}(x, y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} (f^0 \cdot \nabla_y) \cdot \tilde{\psi}(x, y) dy dx, \end{aligned} \quad (5.24)$$

wobei n_y die äußere Einheitsnormale an $\partial\mathcal{Y}$ darstellt und das Oberflächenintegral aufgrund der Wahl von $\tilde{\psi}$ verschwinden muß. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt, daß $f^0 \cdot \nabla_y = 0$ fast überall in $\Omega \times \mathcal{Y}$ erfüllt sein muß. \square

Lemma 30 (Konvergenz spezieller periodischer Funktionen, G. ALLAIRE [4], Lemma 5.7)

Es seien die Funktionen $\phi_1(x) \in L^p(\Omega)$ und $\phi_2(y) \in L_{per}^q(\mathcal{Y})$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mit $1 \leq p \leq +\infty$ gegeben. Dann ist das Produkt $\phi_1(x)\phi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$ in Ω meßbar und es gilt die Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \phi_1(x) \phi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} |\phi_1(x) \phi_2(y)| dy dx. \quad (5.25)$$

Unterhalbstetigkeit und Polykonvexität

Satz 31 (Konvergenz und Unterhalbstetigkeit von Funktionalen, G. ALLAIRE [5], Theorem 3.7)

Es sei $\{f^\varepsilon\}$ eine Folge in $L^2(\Omega)$, welche zweiskalig gegen den Grenzwert $f_0(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$ konvergiere. Weiter sei $F(x, y, \lambda)$ ein Funktional, welches stetig von $x \in \Omega$ abhängt, meßbar und \mathcal{Y} -periodisch bezüglich $y \in \mathcal{Y}$ ist sowie konvex und stetig differenzierbar bezüglich $\lambda \in \mathbb{R}$. Zusätzlich

genüge F einer quadratischen Wachstumsbedingung in λ . Es existieren also zwei reelle Konstanten $0 < c \leq C$, so daß für alle $(x, y) \in \Omega \times \mathcal{Y}$ die Bedingung $c|\lambda|^2 \leq F(x, y, \lambda) \leq C(1 + |\lambda|^2)$ erfüllt ist. Dann gilt die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, f^{\varepsilon}(x)\right) dx \geq \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} F(x, y, f_0(x, y)) dy dx . \quad (5.26)$$

Definition 32 (Polykonvexität, J. BALL [7], Definition 4.2)

Eine Funktion $\psi : \bar{\Omega} \times \mathcal{M}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt polykonvex, wenn es für jedes $x \in \bar{\Omega}$ eine konvexe Funktion $\tilde{\psi}_x : \mathcal{M}^n \times \mathcal{M}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodaß für alle $F \in \mathcal{M}_+^n$ die Gleichheit $\psi(x, F) = \tilde{\psi}_x(F, \text{Cof } F, \det F)$ gilt. Dabei ist $\text{Cof } F$ die Kofaktormatrix von F und für $i, j = 1, \dots, n$ komponentenweise durch $(\text{Cof } F)_{ij} = (-1)^{i+j} \det F^{(ij)}$ gegeben, wobei $F^{(ij)}$ jeweils durch Streichen der i . Zeile und j . Spalte von F entsteht. Ist F zusätzlich invertierbar, so gilt $\text{Cof } F = (\det F)F^{-T}$.

Zusammenhang zwischen der Zweiskalenkonvergenz und der asymptotischen Entwicklung

Sofern bei einem linear-elastischen Problem für das gesuchte Verschiebungsfeld ein asymptotischer Ansatz im Sinne von Gleichung (4.2) gerechtfertigt ist, fallen die Ergebnisse von Zweiskalenkonvergenz und asymptotischer Entwicklung gemäß [20, Bemerkung 9.6] zusammen. Zusätzlich ist die schwache Konvergenz der tatsächlichen unbekannten Lösung gegen das zweiskalige homogenisierte Ergebnis für $\varepsilon \rightarrow 0$ bereits durch Satz 23 garantiert und muß nicht explizit nachgewiesen werden. In diesem Sinn beinhaltet die Methode der Zweiskalenkonvergenz den ursprünglichen Ansatz der asymptotischen Entwicklung, liefert jedoch im allgemeinen einen freieren Zugang zu Konvergenzbetrachtungen von periodisch oszillierenden Funktionen, welche unter dem Einfluß eines Parameters $\varepsilon \ll 1$ stehen.

5.2 Energievariation des periodischen hyperelastischen Problems

In diesem Abschnitt versuchen wir für nichtlineare Hyperelastizität periodischer Materialien unter gemischten Randbedingungen eine zweiskalig konvergente homogenisierte Lösung zu gewinnen. Dazu gehen wir von der Betrachtung der zugrunde liegenden Gesamtenergie des Problems aus. Für die mathematische Formulierung der nichtlinearen Elastizitätstheorie greifen wir auf das Buch [19] zurück, dessen Studium dem interessierten Leser sehr empfohlen wird. Wir betrachten alle relevanten Größen in den makro- und mikroskopischen Referenzkonfigurationen $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ und $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$. Der Wechsel auf die Momentankonfigurationen \mathcal{R}_t und \mathcal{V}_t kann, wenn nötig, mithilfe der aus der Kontinuumsmechanik bekannten Transformationen vollzogen werden. Abhängigkeiten von der Zeit müssen in die Formulierung des Problems nicht mit aufgenommen werden, da die hyperelastische Theorie zeitunabhängig ist. Wir werden sehen, daß sich eine geschlossene Lösung im Allgemeinen nicht bestimmen läßt. Mit der Einschränkung auf linearisierte Spannungsdehnungsbeziehungen, Kapitel 5.6, oder der erneuten Verwendung von asymptotischen Reihenentwicklungen, Kapitel 5.6.2, kann dieses Problem zumindest formal behoben werden.

Funktional der Gesamtenergie

Als Ansatz für die gesamte Energie Π eines hyperelastischen Materials wählen wir in der Referenzkonfiguration $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ gemäß dem Hu-Washizu-Prinzip [31] die Darstellung

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \mathbf{P}) := & \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \psi(\mathbf{X}, [\mathbf{I} + \mathbf{H}]^T \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{H}]) + \mathbf{P} : (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{H}) - \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} \, dV \\ & - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, dA, \end{aligned} \quad (5.27)$$

wobei wir die vorkommenden Größen wie folgt definieren:

- \mathbf{I} – Einheitstensor zweiter Stufe
- $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ – unbekannter Verschiebungsvektor
- $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ – vorgegebene Verschiebungsranddaten auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$
- $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ – unbekannter Verschiebungsgradient
- $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ – unbekannter erster Piola-Kirchhoff-Tensor
- $\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X})$ – vorgegebene spezifische Volumenkräftedichte, welche nur von $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ abhängen soll (*dead loading*)

- $\bar{\rho}_0(\mathbf{X})$ – vorgegebene Materialdichte in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$
- $\mathbf{t}(\mathbf{X})$ – unbekannter Spannungsvektor
- $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X})$ – vorgegebene Spannungsranddaten auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma$
- $\psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}(\mathbf{X}))$ [kurz: $\psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})$] – vorgegebene inhomogene freie Energiefunktion pro Volumeneinheit in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$, welche im allgemeinen als *polykonvex* angenommen wird
- $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ – rechter Cauchy-Green-Tensor mit $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ und dem Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I}$

Die bekannten mechanischen Beziehungen zwischen den vier zunächst als unabhängig voneinander angenommenen Größen \mathbf{u} , \mathbf{t} , \mathbf{H} und \mathbf{P} ergeben sich später durch die Minimierung der Gesamtenergie vermöge der ersten Variation von Gleichung (5.27).

Die Polykonvexität der freien Energiefunktion ψ wird in [19] ausführlich diskutiert. Dort zeigt sich, daß die ursprüngliche Forderung konvexer Funktionale in vielen Fällen physikalisch nicht sinnvoll ist. Die Abschwächung auf polykonvexes Verhalten im Sinne von Definition 32 weist diese Widersprüche nicht mehr auf. Der große Vorteil von konvexen Energien ist jedoch zweifach gegeben. Zum einen existiert maximal ein einziges globales Minimum, zum anderen ist das Nullsetzen der ersten Variation zum Auffinden dieses Extremwertes allein schon ausreichend. Glücklicherweise liegen diese beiden Eigenschaften auch bei polykonvexen Funktionalen vor.

Es bleibt anzumerken, daß einige etablierte Materialmodelle nicht polykonvex sind. Unter gewissen Einschränkungen können diese trotzdem mit der Minimierungstheorie für konvexe und polykonvexe Funktionale behandelt werden. Die damit erzielten Resultate bleiben innerhalb des abgesteckten Rahmens akzeptabel. Als ein solches Beispiel werden uns später die *St. Venant-Kirchhoff-Materialien* begegnen, welche in der Elastizitätstheorie für kleine bis moderate Deformationen häufig Anwendung finden.

Definition der verwendeten Funktionenräume

Damit wir die mathematischen Verfahren der Variationsrechnung und der Zweiskalenkonvergenz korrekt anwenden können, müssen wir für die auftretenden Größen die passenden Funktionenräume definieren. Wir setzen voraus:

- $\mathbf{P}(\mathbf{X}) \in L^2_{pio}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}) := \left\{ \mathbf{M} \mid \mathbf{M} \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \text{ und } \mathbf{M} \cdot \nabla \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3) \right\}$
- $\mathbf{H}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$
- $\mathbf{u}(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$
- $\mathbf{t}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$

- $\bar{\rho}_0(\mathbf{X}) \in L^\infty(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma; \mathbb{R}^3)$

Der Raum des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} wird passend zum Spursatz 6, der des Spannungstensors \mathbf{P} passend zum Normalenrandwertsatz 7 gewählt. Dadurch wird der Begriff der Randwerte für diese beiden Größen sinnvoll und eindeutig.

Erste Variation des Energiefunktional

Wir sind an einem Energieminimum interessiert. Da das gesamte Funktional Π als polykonvex angenommen wird, reicht dazu nach [19] das Auffinden eines stationären Punktes aus. In diesem Sinn bilden wir die erste Variation $\delta\Pi$ von Π und setzen diese gleich Null.

Für die Variation bezüglich der Variable \mathbf{u} gilt für alle $\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$ die Herleitung

$$\begin{aligned}
\delta\Pi(\mathbf{u}, *, *, *) &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P} : (\nabla(\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u}) - \mathbf{H}) - \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot (\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u}) dV \right. \\
&\quad \left. - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u}) dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA \right\}_{\lambda=0} \\
&= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P} : \frac{d}{d\lambda} (\nabla(\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u}))_{\lambda=0} - \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u})_{\lambda=0} dV \\
&\quad - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u})_{\lambda=0} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t} \cdot \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{u} + \lambda\delta\mathbf{u})_{\lambda=0} dA \\
&= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P} : \frac{d}{d\lambda} (\nabla\mathbf{u} + \lambda\nabla\delta\mathbf{u})_{\lambda=0} - \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta\mathbf{u} dV \\
&\quad - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dA \\
&= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P} : \nabla\delta\mathbf{u} - \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dA . \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Die Variation bezüglich \mathbf{t} beläuft sich für alle $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma$ zu

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi(*, \mathbf{t}, *, *) &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} (\mathbf{t} + \lambda \delta \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA \right\}_{\lambda=0} \\
 &= - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{t} + \lambda \delta \mathbf{t})_{\lambda=0} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA \\
 &= - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dA .
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Für die Variation bezüglich \mathbf{H} folgt für alle $\delta \mathbf{H}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi(*, *, \mathbf{H}, *) &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \psi(\mathbf{X}, [\mathbf{I} + (\mathbf{H} + \lambda \delta \mathbf{H})]^T \cdot [\mathbf{I} + (\mathbf{H} + \lambda \delta \mathbf{H})]) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{P} : (\nabla \mathbf{u} - (\mathbf{H} + \lambda \delta \mathbf{H})) dV \right\}_{\lambda=0} \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{d}{d\lambda} \psi(\mathbf{X}, \underbrace{[\mathbf{I} + (\mathbf{H} + \lambda \delta \mathbf{H})]^T \cdot [\mathbf{I} + (\mathbf{H} + \lambda \delta \mathbf{H})]}_{=: \mathbf{F}_\lambda^T \cdot \mathbf{F}_\lambda = \mathbf{C}_\lambda})_{\lambda=0} \\
 &\quad + \mathbf{P} : \frac{d}{d\lambda} (\nabla \mathbf{u} - (\mathbf{H} + \lambda \delta \mathbf{H}))_{\lambda=0} dV \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}_\lambda} : \frac{\partial \mathbf{C}_\lambda}{\partial \mathbf{F}_\lambda} : \frac{\partial \mathbf{F}_\lambda}{\partial \mathbf{H}_\lambda} \right)_{\lambda=0} : \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{H} + \lambda \delta \mathbf{H})_{\lambda=0} - \mathbf{P} : \delta \mathbf{H} dV \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}_\lambda} (\mathbf{F}_\lambda^T \cdot \mathbf{F}_\lambda)_{\lambda=0} : \delta \mathbf{H} - \mathbf{P} : \delta \mathbf{H} dV \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} 2\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{H} - \mathbf{P} : \delta \mathbf{H} dV \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \delta \mathbf{H} : \left\{ 2(\mathbf{I} + \mathbf{H}) \cdot \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \mathbf{P} \right\} dV ,
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

wobei im vorletzten Schritt die Symmetrie des Tensors $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}$ und im letzten Schritt die Symmetrie des inneren Produkts zweier Tensoren zweiter Stufe ausgenutzt wurden.

Die Variation bezüglich \mathbf{P} ergibt für alle $\delta \mathbf{P}(\mathbf{X}) \in L^2_{pio}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}\delta \Pi(*, *, *, \mathbf{P}) &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{P} + \lambda \delta \mathbf{P}) : (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{H}) dV \right\}_{\lambda=0} \\ &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{d}{d\lambda} (\lambda \delta \mathbf{P} : (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{H}))_{\lambda=0} dV \\ &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \delta \mathbf{P} : (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{H}) dV .\end{aligned}\tag{5.31}$$

Für die gesamte nullgesetzte erste Variation folgt damit für alle $\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$, alle $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma$, alle $\delta \mathbf{H}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und alle $\delta \mathbf{P}(\mathbf{X}) \in L^2_{pio}(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ der Ausdruck

$$\begin{aligned}\delta \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \mathbf{P}) &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P} : \nabla \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{H} : \left\{ 2(\mathbf{I} + \mathbf{H}) \cdot \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \mathbf{P} \right\} \\ &\quad + \delta \mathbf{P} : (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{H}) - \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA \\ &\quad - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{t} dA \stackrel{!}{=} 0 .\end{aligned}\tag{5.32}$$

Einführung der periodischen Mikrostruktur

Wir versehen die Referenzkonfiguration mit der periodischen Mikrostruktur aus Abschnitt 3.2. Formal läßt sich die dadurch entstehende Abhängigkeit vom Mikroskopischen durch das hochgestellte ε wie folgt darstellen:

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \mathbf{P}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \delta \Pi(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{t}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon, \mathbf{P}^\varepsilon) \stackrel{!}{=} 0 ,\tag{5.33a}$$

$$\psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \quad \rightarrow \quad \psi\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}, \mathbf{C}^\varepsilon\right) =: \psi^\varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{C}) ,\tag{5.33b}$$

$$\bar{\rho}_0(\mathbf{X}) \quad \rightarrow \quad \bar{\rho}_0\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) =: \bar{\rho}_0^\varepsilon .\tag{5.33c}$$

Die explizite Abhängigkeit des Funktionals ψ und der Dichte $\bar{\rho}_0$ von $\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}$ drückt das periodische Verhalten der Materialeigenschaften aus. Allgemein ist damit für $\bar{\rho}_0(\mathbf{Y})$ ein physikalisch sinn-

voller Raum durch $L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ gegeben. Die Grundmenge der vier Funktionen \mathbf{u}^ε , \mathbf{t}^ε , \mathbf{H}^ε und \mathbf{P}^ε bleibt hingegen weiterhin die Referenzkonfiguration $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$, wodurch die Zugehörigkeiten $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{t}^\varepsilon(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und $\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \in L_{pio}^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ unverändert bleiben. Die Variationen der vier Größen \mathbf{u}^ε , \mathbf{t}^ε , \mathbf{H}^ε und \mathbf{P}^ε sind damit weiterhin durch $\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$, $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma$, $\delta \mathbf{H}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ sowie $\delta \mathbf{P}(\mathbf{X}) \in L_{pio}^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ gegeben. Ebenso verbleiben die restlichen Größen $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ und $\bar{\mathbf{t}}$ in ihren bisher definierten Räumen.

Die erste Variation der Gesamtenergie (5.32) ergibt im periodischen Fall für alle $\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$, alle $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ mit $\delta \mathbf{t}(\mathbf{X}) = 0$ auf $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma$, alle $\delta \mathbf{H}(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und alle $\delta \mathbf{P}(\mathbf{X}) \in L_{pio}^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^\varepsilon : \nabla \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{H} : \left\{ 2(\mathbf{I} + \mathbf{H}^\varepsilon) \cdot \frac{\partial \psi^\varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}^\varepsilon} - \mathbf{P}^\varepsilon \right\} + \delta \mathbf{P} : (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{H}^\varepsilon) - \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \\ & - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t}^\varepsilon \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} (\mathbf{u}^\varepsilon - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{t} dA \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, Satz 10, und der Umrechnung

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^\varepsilon : \nabla \delta \mathbf{u} - \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t}^\varepsilon \cdot \delta \mathbf{u} dA \\ & = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\varepsilon) \cdot \nabla - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\varepsilon \cdot \nabla - \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t}^\varepsilon \cdot \delta \mathbf{u} dA \\ & = - \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\varepsilon \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \mathbf{t}^\varepsilon \cdot \delta \mathbf{u} dA \\ & = - \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{\mathbf{b}}) dV + \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}) dA + \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^\varepsilon) dA \end{aligned} \quad (5.35)$$

folgen die aus der Kontinuumsmechanik für ein gemischtes Randwertproblem bekannten lokalen Gleichungen

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^\varepsilon(\mathbf{X}) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \quad (5.36)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) - \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \quad (5.37)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma, \quad (5.38)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \mathbf{t}^\varepsilon(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u, \quad (5.39)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u, \quad (5.40)$$

$$0 \stackrel{!}{=} 2(\mathbf{I} + \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{X})) \cdot \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \mathbf{C}^\varepsilon}(\mathbf{X}) - \mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}. \quad (5.41)$$

5.3 Über die Zerlegung zweiskaliger Variationsgleichungen

Bevor wir die Theorie der Zweiskalenkonvergenz auf die Gleichungen (5.36) - (5.41) anwenden, lernen wir ein Verfahren zur Zerlegung einer zweiskaligen Variationsgleichung in einen makroskopischen und einen mikroskopischen Anteil kennen. Diese Zerlegung ist äquivalent zur zweiskaligen Ausgangsgleichung. Für eine beliebige Funktion $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ betrachten wir für alle $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ die Variationsgleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} . \quad (5.42)$$

Makroskopische Gleichung

Gemäß Satz 12 ist Gleichung (5.42) für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ und für alle $\phi_Y(\mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ äquivalent zu

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \phi_Y(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} . \quad (5.43)$$

Mit der Wahl $\phi_Y(\mathbf{Y}) = 1$ erhalten wir für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die makroskopische Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} =: \langle f \rangle_Y(\mathbf{X}) . \quad (5.44)$$

Ausgewählte Größen werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit auch mit $(*)^M := \langle (*) \rangle_Y$ bezeichnen, wobei das hochgestellte große M als *makroskopisch* gelesen werden kann.

Mikroskopische Gleichung

Mit beliebigem $\phi_Y(\mathbf{Y})$ erhalten wir aus Gleichung (5.43) unter Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die mikroskopische Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} , \quad (5.45)$$

wobei diese Gleichung durch das Auftreten von \mathbf{X} weiterhin mit der makroskopischen Ebene gekoppelt ist. Dadurch wird eine strikte Trennung von mikro- und makroskopischer Ebene im allgemeinen unmöglich. Gemäß Anmerkung 13 ist bereits die Betrachtung von Testfunktionen $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}))$ für den eben vorgestellten Trennungsvorgang ausreichend.

5.4 Anwendung der Zweiskalenkonvergenz – Gleichungen (5.36) - (5.40)

In diesem Kapitel wird mithilfe der im letzten Abschnitt 5.2 vorgestellten Skalenzerlegung der Versuch unternommen, aus den Gleichungen (5.36) - (5.40) des einskalgigen periodischen Problems mithilfe der Zweiskalenkonvergenz für den Fall $\varepsilon \rightarrow 0$ ein homogenisiertes Ersatzproblem zu gewinnen.

5.4.1 Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.36)

$$\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^\varepsilon(\mathbf{X}) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_\mathcal{R}$$

Es sei $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2\left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \left[C_{per}(\mathcal{Y}_\mathcal{R})\right]^3\right)$ beliebig gegeben. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit der Einschränkung $\boldsymbol{\phi}\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$, was laut [20] als eine Funktion $\boldsymbol{\phi}^*(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R})$ aufgefaßt werden kann, und bilden für alle $\boldsymbol{\phi}\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \in L^2\left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \left[C_{per}(\mathcal{Y}_\mathcal{R})\right]^3\right)$ das Integral über $\mathcal{R}_\mathcal{R}$. Es folgt die Gleichung

$$\int_{\mathcal{R}_\mathcal{R}} (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{\phi} + \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.46)$$

Komponentenweise sind dazu für $i, j = 1, 2, 3$ und alle $\phi_i\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \in L^2\left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; C_{per}(\mathcal{Y}_\mathcal{R})\right)$ die Gleichungen

$$\int_{\mathcal{R}_\mathcal{R}} \phi_i \frac{\partial P_{ij}^\varepsilon}{\partial X_j} + \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{b}_i \phi_i \, d\mathbf{X} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.47)$$

äquivalent. Unter der Voraussetzung, daß $\{P_{ij}^\varepsilon\}$ für alle $i, j = 1, 2, 3$ eine beschränkte Folge darstellt, konvergiert $\{P_{ij}^\varepsilon\}$ gemäß Satz 20 bis auf eine Teilfolge zweiskalig gegen $P_{ij}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R} \times \mathcal{Y}_\mathcal{R})$. Für die Konvergenz der Divergenz wenden wir für jedes feste $i = 1, 2, 3$ Satz 28 an. Insgesamt folgt für alle $\phi_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R}; C_{per}(\mathcal{Y}_\mathcal{R}))$ der Zweiskalengrenzwert

$$\int_{\mathcal{R}_\mathcal{R}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{Y}_\mathcal{R}} \left(\frac{\partial P_{ij}^M}{\partial X_j} + \frac{\partial P_{ij}^1}{\partial Y_j} \right) \phi_i \, d\mathbf{Y} + \bar{b}_i \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{Y}_\mathcal{R}} \bar{\rho}_0 \phi_i \, d\mathbf{Y} \right) d\mathbf{X} \stackrel{!}{=} 0, \quad (5.48)$$

wobei $P_{ij}^M(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R})$ durch $\frac{1}{|\mathcal{Y}_\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{Y}_\mathcal{R}} P_{ij}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \, d\mathbf{Y}$ definiert ist. Weiter gelten die Beziehungen $P_{ij}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R}; W_{per}(\mathcal{Y}_\mathcal{R}))$ und $\bar{\rho}_0(\mathbf{Y}) \in L^\infty_{per}(\mathcal{Y}_\mathcal{R})$.

Die Konvergenz von ρ_0^ε gegen $\bar{\rho}_0$ folgt daraus, daß das Produkt $\bar{\rho}_0^\varepsilon \phi_i^*$ für alle $\phi_i^* \in C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}))$ wieder in $C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}))$ liegt und damit gemäß Satz 16 eine zulässige Testfunktion darstellt, welche die gewünschte Zweiskalenkonvergenz automatisch erfüllt.

Mit $\mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und $\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; [W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})]^{3 \times 3})$ schreibt sich Gleichung (5.48) für alle $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; [C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})]^3)$ auch als

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{P}^M \cdot \nabla + \mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y) \cdot \phi \, dY + \bar{\mathbf{b}} \cdot \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \bar{\rho}_0 \phi \, dY \right) dX \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.49)$$

Wie wir oben festgestellt haben, ist dies gemäß Satz 12, Anmerkung 13 und der Wahl $\phi_Y(\mathbf{Y}) = 1$ äquivalent zur makroskopischen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^M \cdot \nabla + \mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y \, dY + \bar{\mathbf{b}} \cdot \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \bar{\rho}_0 \, dY \right) \\ &= \mathbf{P}^M \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^M \bar{\mathbf{b}} + \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y \, dY \\ &= \mathbf{P}^M \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^M \bar{\mathbf{b}} \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

wobei wir den Satz von Gauß und die $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität von \mathbf{P}^1 bezüglich des zweiten Arguments ausgenutzt sowie die Definition $\bar{\rho}_0^M := \langle \bar{\rho}_0 \rangle_Y$ verwendet haben.

Um eine mikroskopische Aussage herzuleiten, betrachten wir dieselbe Gleichung für beliebige Testfunktionen $\phi_Y(\mathbf{Y}) \in C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$. Für den Fall einer homogenen Materialdichte $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_0^\varepsilon = \text{konstant}$, welche beispielsweise bei manchen polykristallinen Materialien angenommen werden kann, gilt die Beziehung $\bar{\rho}_0^M = \bar{\rho}_0$. Damit folgt für alle $\phi_Y(\mathbf{Y}) \in C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{P}^M \cdot \nabla + \mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y) \cdot \phi_Y \, dY + \bar{\mathbf{b}} \cdot \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \bar{\rho}_0 \phi_Y \, dY \right) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y) \cdot \phi_Y \, dY + \underbrace{(\mathbf{P}^M \cdot \nabla + \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}})}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \cdot \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \phi_Y \, dY \right) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y) \cdot \phi_Y \, dY \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Da die Inklusion $C_0^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3) \subset C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ erfüllt ist, können wir das Fundamentallema der Variationsrechnung anwenden. Damit folgt für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die mikroskopische Beziehung

$$\mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}. \quad (5.52)$$

Für den allgemeinen Fall $\bar{\rho}_0^\varepsilon \in L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ hingegen ergibt sich für alle $\phi_Y(\mathbf{Y}) \in C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{P}^M \cdot \nabla + \mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y) \cdot \phi_Y dY + \bar{\mathbf{b}} \cdot \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \bar{\rho}_0 \phi_Y dY \right) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{P}^M \cdot \nabla + \mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y + \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}}) \cdot \phi_Y dY \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

woraus für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die mikroskopische Beziehung

$$\mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y + \mathbf{P}^M \cdot \nabla + \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \quad (5.54)$$

folgt. Dabei sind die Größen $\mathbf{P}^M \cdot \nabla$ und $\bar{\mathbf{b}}$ bei festem $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ über $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ konstant. Unter Verwendung von Gleichung (5.50) ist (5.54) für fast alle $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ gleichbedeutend mit der Darstellung

$$\mathbf{P}^1 \cdot \nabla_Y = \bar{\mathbf{b}} (\bar{\rho}_0^M - \bar{\rho}_0) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}. \quad (5.55)$$

Damit befindet sich die mikroskopische Divergenz von \mathbf{P}^1 im Gleichgewicht mit den makroskopischen Volumenkräften, welche punktweise mit der Abweichung der mikroskopischen Materialdichte von ihrem eigenen Volumenmittelwert gewichtet ist.

Entscheidend für das weitere Vorgehen ist die Frage, inwiefern \mathbf{P}^0 und \mathbf{P}^1 zusammenhängen. Die wünschenswerte Eigenschaft $\mathbf{P}^0 = \mathbf{P}^1$ kann nicht gelten, da aus $\mathbf{P}^1 \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; [W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})]^{3 \times 3})$ die Eigenschaft $\langle \mathbf{P}^1 \rangle_Y = 0$ folgt, wir aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathbf{P}^M = \langle \mathbf{P}^0 \rangle_Y \neq 0$ annehmen dürfen. Aus $\langle \mathbf{P}^0 \rangle_Y \neq \langle \mathbf{P}^1 \rangle_Y$ folgt offensichtlich $\mathbf{P}^0 \neq \mathbf{P}^1$. Jedoch läßt sich unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß neben $\{\mathbf{P}^\varepsilon\}$ auch die Folge $\{\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \nabla\}$ beschränkt ist, mithilfe von Satz 29 auch für \mathbf{P}^0 eine Divergenzbeziehung nachweisen. Dort folgt nämlich

$$\mathbf{P}^0 \cdot \nabla_Y = 0 \quad \text{fast überall auf } \mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}. \quad (5.56)$$

Wir fassen \mathbf{P}^1 als eine mikroskopische Fluktuation auf, welche auf das restliche Problem und die darin enthaltenen Größen zunächst keinen Einfluß auszuüben scheint. Deswegen nehmen wir die Divergenzbeziehung (5.54) in unser Gesamtproblem nicht mit auf, sondern werden

uns im späteren Verlauf auf die Bestimmung von \mathbf{P}^0 mithilfe der zugehörigen Divergenzgleichung (5.56) konzentrieren. Unter diesem Blickpunkt gewinnen wir aus der Gleichung (5.36) insgesamt die zweiskaligen Beziehungen

$$\mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^M \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \quad (5.57)$$

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \nabla_Y \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \text{ für fast jedes } \mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \quad (5.58)$$

$$\mathbf{P}^M(\mathbf{X}) := \langle \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_Y, \quad (5.59)$$

$$\bar{\rho}_0^M := \langle \bar{\rho}_0(\mathbf{Y}) \rangle_Y. \quad (5.60)$$

5.4.2 Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.37)

$$\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) - \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$$

Es sei $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; [C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})]^{3 \times 3}\right)$ beliebig gegeben. Wir multiplizieren Gleichung (5.37) mit der Einschränkung $\boldsymbol{\phi}\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$. Für das Volumenintegral über $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ folgt damit für alle $\phi_{ij}\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})\right)$

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{H}^\varepsilon) : \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} \cong \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial X_j} \phi_{ij} - H_{ij}^\varepsilon \phi_{ij} \, d\mathbf{X} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.61)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Folgen $\{u_i^\varepsilon\} \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ und $\{H_{ij}^\varepsilon\} \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ für alle $i, j = 1, 2, 3$ jeweils beschränkt sind, folgt mit den Sätzen 23 und 26 sowie mit Korollar 27 die Existenz des Zweiskalengrenzwertes

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^1}{\partial Y_j} - H_{ij}^0 \right) \phi_{ij} \, d\mathbf{Y} \, d\mathbf{X} \quad (5.62)$$

für alle $\phi_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})\right)$, welcher bis auf eine Teilfolge für $\varepsilon \rightarrow 0$ erreicht wird. Dabei gelten $u_i^0(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$, $u_i^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})\right)$ und $H_{ij}^0 \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ für alle $i, j = 1, 2, 3$. Analog dazu gilt mit $\mathbf{u}^0(\mathbf{X}) \in H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; [W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})]^3\right)$

und $\mathbf{H}^0 \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ für alle $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; [C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})]^{3 \times 3})$ insgesamt die tensorielle Gleichung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{H}^\varepsilon) : \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\nabla \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 - \mathbf{H}^0) : \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{Y} \, d\mathbf{X} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.63)$$

Die Anwendung von Satz 12 und Anmerkung 13 liefert mit der Wahl $\boldsymbol{\phi}_Y(\mathbf{Y}) = 1$ die Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \nabla \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 - \mathbf{H}^0 \, d\mathbf{Y} \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \quad (5.64)$$

was laut Satz 10 für alle $\boldsymbol{\phi}_X(\mathbf{X}) \in C_0^\infty(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ äquivalent ist zur Aussage

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \nabla \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 - \mathbf{H}^0 \, d\mathbf{Y} \right) : \boldsymbol{\phi}_X \, d\mathbf{X}. \quad (5.65)$$

Für den mittleren Summanden $\nabla_Y \mathbf{u}^1$ in Gleichung (5.65) gilt mit der Außeneinheitsnormalen \mathbf{n}^Y an $\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ für alle $i, j = 1, 2, 3$ komponentenweise die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial u_i^1}{\partial Y_j} \, d\mathbf{Y} \, \phi_{X_{ij}} \, d\mathbf{X} &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial u_i^1}{\partial Y_j} \phi_{X_{ij}} \, d\mathbf{Y} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial}{\partial Y_j} \left(u_i^1 \phi_{X_{ij}} \right) - \underbrace{u_i^1 \frac{\partial \phi_{X_{ij}}}{\partial Y_j}}_{=0} \, d\mathbf{Y} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} u_i^1 n_j^Y \, d\mathbf{Y} \, \phi_{X_{ij}} \, d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Aus Gleichung (5.65) folgt damit für fast alle $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \nabla \mathbf{u}^0 - \mathbf{H}^0 \, d\mathbf{Y} + \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n}^Y \, d\mathbf{Y} \right) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \nabla \mathbf{u}^0 - \mathbf{H}^0 \, d\mathbf{Y} \end{aligned}$$

$$= \nabla \mathbf{u}^0 - \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{H}^0 d\mathbf{Y}, \quad (5.67)$$

weil das Oberflächenintegral des Tensors $\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n}^Y$ aufgrund der $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität von \mathbf{u}^1 in \mathbf{Y} gleich Null sein muß. Mit der Definition $H_{ij}^M := \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} H_{ij}^0 d\mathbf{Y}$ folgt die makroskopische Gleichung

$$\nabla \mathbf{u}^0 - \mathbf{H}^M \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}. \quad (5.68)$$

Für die mikroskopische Vorschrift betrachten wir im Einklang mit Gleichung (5.43) beliebige Funktionen $\boldsymbol{\phi}_Y(\mathbf{Y}) \in C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \subset L^2(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Es folgt damit für alle $\boldsymbol{\phi}_Y$ und für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die Beziehung

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\nabla \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 - \mathbf{H}^0) : \boldsymbol{\phi}_Y d\mathbf{Y}, \quad (5.69)$$

woraus mit der Inklusion $C_0^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \subset C_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die lokale mikroskopische Gleichung

$$\nabla \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 - \mathbf{H}^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \quad (5.70)$$

resultiert. Zusammengefaßt gewinnen wir aus der vierten Gleichung:

$$\nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) - \mathbf{H}^M(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \quad (5.71)$$

$$\mathbf{H}^M(\mathbf{X}) := \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y}, \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \text{ und} \\ &\text{für fast jedes } \mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

wobei $\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bezüglich seinem zweiten Argument $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch ist.

5.4.3 Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.38)

$$\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma$$

Wir wissen aus Satz 23, daß $\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X})$ in $L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ schwach gegen $\mathbf{P}^M(\mathbf{X})$ konvergiert. Gemäß Satz 7 ist die Abbildung, welche der Funktion $\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \in L^2_{\text{Pio}}(\mathcal{R}_\mathcal{R}) \subset L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ die Normalenwerte $\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X})$ auf $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma; \mathbb{R}^3)$ zuweist, linear und stetig. Wir haben hierbei auf den Spannungsrand $\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma$ eingeschränkt und von Tensoren erster auf Tensoren zweiter Stufe verallgemeinert. Gemäß der in Kapitel 5.2 getroffenen Annahme liegt $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X})$ im Raum $L^2(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma; \mathbb{R}^3)$, welcher laut Anmerkung 9 in $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma; \mathbb{R}^3)$ eingebettet werden kann. Laut [44, Lemma 13.4] sind lineare Operatoren zwischen zwei normierten Räumen genau dann stetig, wenn sie *schwach folgenstetig* sind. Da die betrachtete Abbildung sowohl linear als auch stetig ist, muß sie demnach schwach folgenstetig sein. Es gilt damit

$$(\mathbf{P}^\varepsilon - \mathbf{P}^M) \xrightarrow{\text{schwach}} 0 \quad \text{in } L^2(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \mathbf{P}^M \cdot \mathbf{n}) \xrightarrow{\text{schwach}} 0 \quad \text{in } L^2(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma; \mathbb{R}^3). \quad (5.74)$$

Damit gilt für alle $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma; \mathbb{R}^3)$ die Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma} (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, dX &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma} (\mathbf{P}^M \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, dX \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma} (\mathbf{P}^M \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, dX, \end{aligned} \quad (5.75)$$

woraus für alle $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma; \mathbb{R}^3)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma} (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, dX \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma} (\mathbf{P}^M \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, dX \end{aligned} \quad (5.76)$$

folgt. Die Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung führt auf die Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^\sigma. \quad (5.77)$$

5.4.4 Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.39)

$$\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \mathbf{t}^\varepsilon(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$$

Die Zweiskalenkonvergenz dieser Gleichung läßt sich in Analogie zum letzten Abschnitt 5.4.3 durchführen. Es ist dabei jedoch zusätzlich zu beachten, daß diesmal auch der Spannungsvektor $\mathbf{t}^\varepsilon(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3)$ vom Folgenparameter ε abhängig und nicht als Randwert fest vorgegeben ist. Da aber die Folge $\{\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X})\}$ laut Voraussetzung in $L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3)$ beschränkt ist, so muß auch die Folge $\{\mathbf{t}^\varepsilon\}$ in diesem Raum beschränkt sein. Gemäß [20, Theorem 1.18] konvergiert $\{\mathbf{t}^\varepsilon\}$ in diesem Fall bis auf eine Teilfolge schwach gegen ein $\mathbf{t}^0(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3)$. Damit ist für alle $\phi(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} (\mathbf{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^\varepsilon) \cdot \phi \, dX \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u} (\mathbf{P}^M \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^0) \cdot \phi \, dX \end{aligned} \quad (5.78)$$

gültig. Erneut erhalten wir mit dem Fundamentlemma der Variationsrechnung die Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \mathbf{t}^0(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u. \quad (5.79)$$

5.4.5 Zweiskalenkonvergenz von Gleichung (5.40)

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$$

Wir wissen gemäß Satz 23, daß $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})$ in $L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ schwach gegen $\mathbf{u}^0(\mathbf{X})$ konvergiert. Zusätzlich liegen sowohl \mathbf{u}^ε als auch \mathbf{u}^0 in $H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$. Nach Satz 6 ist die Spurabbildung γ eine stetige und lineare Abbildung von $H^1(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$ nach $L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3)$, wobei hier auf drei Dimensionen verallgemeinert und auf den Teilrand $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$ eingeschränkt wurde. Laut [44, Lemma 13.4] sind lineare Operatoren zwischen zwei normierten Räumen genau dann stetig, wenn sie *schwach folgenstetig* sind. Da γ linear und stetig ist, muß diese Funktion demnach schwach folgenstetig sein. Es gilt damit

$$(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0) \xrightarrow{\text{schwach}} 0 \quad \text{in } L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3) \quad \Rightarrow \quad \gamma(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0) \xrightarrow{\text{schwach}} 0 \quad \text{in } L^2(\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u; \mathbb{R}^3), \quad (5.80)$$

weswegen auf dem Teilrand $\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u$ für alle $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u; \mathbb{R}^3)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u} \gamma(\mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u} \gamma(\mathbf{u}^0) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u} \gamma(\mathbf{u}^0) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (5.81)$$

erfüllt ist. Damit folgt aus Gleichung (5.40) für alle $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u} (\mathbf{u}^\varepsilon - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u} \{\gamma(\mathbf{u}^\varepsilon) - \bar{\mathbf{u}}\} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u} \{\gamma(\mathbf{u}^0) - \bar{\mathbf{u}}\} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u} (\mathbf{u}^0 - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{X} . \end{aligned} \quad (5.82)$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt daraus die gewünschte Beziehung

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_\mathcal{R}^u . \quad (5.83)$$

5.4.6 Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

Aufgrund der allgemeinen, nichtlinearen Form des Funktionals $\psi^\varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{C})$ lässt sich die Konstitutivgleichung (5.41) zunächst nicht mithilfe der Zweiskalenkonvergenz betrachten. Auf dieses Problem werden wir später eingehen und betrachten an dieser Stelle das bisher gewonnene unvollständige homogenisierte Gleichungssystem.

Makroskopische Gleichungen:

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^M \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_\mathcal{R} , \quad (5.84)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) - \mathbf{H}^M(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_\mathcal{R} , \quad (5.85)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma, \quad (5.86)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \mathbf{t}^0(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u, \quad (5.87)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u. \quad (5.88)$$

Volumenmittelwerte:

$$\mathbf{P}^M(\mathbf{X}) := \langle \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_Y, \quad (5.89)$$

$$\mathbf{H}^M(\mathbf{X}) := \langle \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_Y, \quad (5.90)$$

$$\bar{\rho}_0^M := \langle \bar{\rho}_0(\mathbf{Y}) \rangle_Y. \quad (5.91)$$

Mikroskopische Gleichungen für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$:

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \nabla_Y \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (5.92)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (5.93)$$

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \text{ ist bezüglich } \mathbf{Y} \text{ } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch.} \quad (5.94)$$

Durch die $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität der Verschiebungsgröße \mathbf{u}^1 sind periodische Randbedingungen für die mikroskopische Ebene implizit gegeben. Eine konstitutive Darstellung für $\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ fehlt an dieser Stelle jedoch noch.

Die Auswertung der ersten fünf Gleichungen (5.36) bis (5.40) ergibt im Rahmen der Zweiskalenkonvergenz ein Gleichungssystem, welches aus makro- und mikroskopischen Termen besteht. Dabei beeinflussen die mikroskopischen Größen die makroskopische Ebene indirekt durch die Volumenmittelungen über $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$. Umgekehrt bleibt im Mikroskopischen eine direkte Abhängigkeit von der Variable \mathbf{X} erhalten. Können wir das noch offene Gesamtproblem (5.84) bis (5.94) an späterer Stelle erfolgreich vervollständigen, so kann dessen Lösung folglich nur durch gleichzeitiges Bestimmen aller auftretenden gekoppelten Gleichungen gewonnen werden.

Bei der Betrachtung der mikroskopischen Ebene können wir die makroskopische Variable \mathbf{X} jeweils als fest vorgegebenen Parameter betrachten. Dies rechtfertigen wir durch die Tatsache, daß jedem makroskopischen Punkt \mathbf{X} beim Grenzprozeß $\varepsilon \rightarrow 0$ mathematisch ein Mikrovolumen zugeordnet wird, welches die Eigenschaften dieses einzelnen Punktes widerspiegelt. Dadurch bleibt \mathbf{X} in diesem Mikrovolumen konstant und kann als Parameter angesehen werden. Aus numerischer Sicht ist das mikroskopische Problem damit für jeden makroskopischen Iterationsschritt in jedem betrachteten Punkt $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ separat zu lösen.

5.5 Kontinuumsmechanische Konsistenz der zweiskaligen Kinematik und Hills

Bedingung

Bevor wir die Konvergenzeigenschaften des Materialgesetzes (5.41) untersuchen, überprüfen wir in diesem Abschnitt die kontinuumsmechanische Konsistenz des Deformations- und des Verschiebungsgradienten beim Übergang zwischen mikro- und makroskopischer Ebene. Anschließend zeigen wir, daß die in Kapitel 2.2 erwähnte Bedingung von Hill im Kontext der Zweiskalenkonvergenz stets implizit erfüllt ist.

Konsistenz des mikroskopischen Deformationsgradienten in Anlehnung an [81]

Wir bezeichnen das gesamte mikroskopische Verschiebungsfeld mit ω . Es soll die Lagebeziehung $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \left[H^1(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})\right]^3\right)$ erfüllt sein. Unter Berücksichtigung der lokalen Form des Zweiskalenproblems gilt damit für den mikroskopischen Verschiebungsgradienten die Darstellung

$$\nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \stackrel{!}{=} \nabla_Y \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (5.95)$$

wodurch die mikroskopische Verschiebung $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bis auf eine additive Konstante durch $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bestimmt ist. Unter der Bedingung $\det(\nabla_Y \varphi^m(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \det \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) > 0$ definieren wir die mikroskopische Deformation $\varphi^m : \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{Y}_t$ für jedes feste \mathbf{X} durch die Gleichung $\varphi^m(\mathbf{Y}) := \mathbf{Y} + \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Damit folgt für den mikroskopischen Deformationsgradienten die mechanisch konsistente Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\stackrel{!}{=} \nabla_Y \varphi^m(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{I} + \nabla_Y \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{I} + \nabla_Y (\nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \\ &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{I} + \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Damit läßt sich mit dem mikroskopischen Verschiebungsgradienten ein mikroskopischer Deformationsgradient konsistent darstellen.

Wir zeigen, daß der makroskopische Deformationsgradient $\mathbf{F}^M(\mathbf{X})$ durch direkte Volumenmittelung des mikroskopischen Deformationsgradienten gewonnen wird. Zusammen mit der Definition $\mathbf{H}^M(\mathbf{X}) := \langle \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_Y$ und der aus (5.67) gewonnenen Beziehung $\langle \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_Y = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^M(\mathbf{X}) &= \mathbf{H}^M(\mathbf{X}) + \mathbf{I} = \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \mathbf{I} = \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \langle \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_Y + \mathbf{I} \\ &= \langle \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{I} \rangle_Y = \langle \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{I} \rangle_Y = \langle \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_Y. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Gültigkeit von Hills Bedingung

Hills Bedingung fordert die Äquivalenz der mikro- und makroskopischen linearen Verzerrungsenergie. Bezüglich des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors, welcher thermodynamisch zum Deformationsgradienten konjugiert ist, läßt sich dies für jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ durch

$$\mathbf{P}^M(\mathbf{X}) : \mathbf{F}^M(\mathbf{X}) \stackrel{!}{=} \left\langle \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\rangle_Y \quad (5.98)$$

ausdrücken. Diese Bedingung ist durch die Verwendung der Zweiskalenkonvergenz automatisch erfüllt, sofern $\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ im zweiten Argument $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\rangle_Y &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dY \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : (\mathbf{I} + \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) dY \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) dY \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) dY + \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dY \\ &= \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dY \right) : (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) \\ &= \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) : \mathbf{F}^M(\mathbf{X}) . \end{aligned} \quad (5.99)$$

In der drittletzten Zeile wurde dabei die Hilfsrechnung

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \nabla_Y \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dY &= \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \cdot \nabla_Y dY - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \nabla_Y dY \\ &= \underbrace{\int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \underbrace{\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch}} \cdot \mathbf{n}^Y dY}_{=0} - \underbrace{\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \underbrace{\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \nabla_Y}_{(5.92)} dY}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.100)$$

benutzt. Die später in dieser Arbeit hergeleiteten mikroskopischen Spannungs-Dehnungsbeziehungen garantieren stets die geforderte $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität von $\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, da \mathbf{P}^0 jeweils als eine Funktion von $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodischen Größen darstellbar sein wird.

5.6 Anwendung der Zweiskalenkonvergenz – Gleichung (5.41)

5.6.1 Einschränkung auf linearisierte isotrope St. Venant-Kirchhoff-Materialien

Die Nichtlinearität der Helmholtzenergie ψ^ε , welche wir in dieser Arbeit als ein von \mathbf{C}^ε abhängiges Funktional auffassen, lässt im allgemeinen keine zweiskalige Grenzwertbetrachtung der letzten noch offenen Gleichung (5.41) zu. Dieses Problem diskutieren wir in diesem Kapitel anhand der leicht verständlichen Klasse der hyperelastischen *St. Venant-Kirchhoff*-Materialien.

Allgemeine St. Venant-Kirchhoff-Materialien

Die nichtlinearen hyperelastischen und isotropen St. Venant-Kirchhoff-Materialien werden häufig für Finite-Elemente-Simulationen verwendet, da sie eine relativ einfache, in \mathbf{C} lineare Darstellung des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors gewährleisten und nur zwei Parameter für die Materialbeschreibung benötigen. Zu den beiden größten Nachteilen von St. Venant-Kirchhoff-Materialien zählen die Einschränkung auf kleine bis moderate Verzerrungen und die Nicht-Polykonvexität der zugehörigen Helmholtzenergie. Der erste Punkt liefert dem Anwender grobe Schranken für die maximal aufzuerlegende Deformation. Der zweite Punkt erschwert theoretische Überlegungen zur Lösbarkeit des zugehörigen mechanischen Problems [19]. Trotzdem möchten wir ein solches Material im Rahmen der Zweiskalenkonvergenz untersuchen, da die resultierenden Gleichungen gut zu handhaben sind.

Vermöge unserer Mikrostruktur und gemäß [19, S. 130] gilt für den zweiten Piola-Kirchhoff-Tensor $\hat{\mathbf{P}}^\varepsilon$ mit den $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodischen Funktionen $\lambda\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ und $\mu\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$, welche die Elastizitätsparameter des Materials im aktuellen Punkt zurückgeben, die Darstellung

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^\varepsilon(\mathbf{C}^\varepsilon) &= \lambda\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \left\{ \text{Sp} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{C}^\varepsilon - \mathbf{I}) \right) \right\} \mathbf{I} + \mu\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) (\mathbf{C}^\varepsilon - \mathbf{I}) \\ &\cong \lambda\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) (\text{Sp} \mathbf{E}^\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \mathbf{E}^\varepsilon \\ &\cong \lambda\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \left\{ \text{Sp} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{F}^{\varepsilon T} \cdot \mathbf{F}^\varepsilon - \mathbf{I}) \right) \right\} \mathbf{I} + \mu\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) (\mathbf{F}^{\varepsilon T} \cdot \mathbf{F}^\varepsilon - \mathbf{I}),\end{aligned}\tag{5.101}$$

wobei $\mathbf{E}^\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^\varepsilon - \mathbf{I})$ den Greenschen Verzerrungstensor bezeichne. Im Idealfall ließe sich daraus zusammen mit der Beziehung $\mathbf{P}^\varepsilon = \mathbf{F}^\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{P}}^\varepsilon$ der Zweiskalengrenzwert des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors beim Übergang $\varepsilon \rightarrow 0$ bestimmen.

Leider lässt sich aufgrund der Produkte von mehr als zwei Folgengliedern – es sei beispielsweise der Teilausdruck $\mu\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) \mathbf{F}^{\varepsilon T} \cdot \mathbf{F}^\varepsilon$ in Gleichung (5.101) erwähnt – kein geeigneter Konvergenzsatz finden und anwenden. Auch Aussagen über untere Schranken im Rahmen der *schwachen*

Unterhalbstetigkeit, welche gemäß [23] für allgemeine Funktionale f unter der Voraussetzung $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{\text{schwach}} u^0(x)$ durch

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, u^\varepsilon(x), \nabla u^\varepsilon(x), \dots, \nabla^k u^\varepsilon(x)) dx \\ \geq \int_{\Omega} f(x, u^0(x), \nabla u^0(x), \dots, \nabla^k u^0(x)) dx \end{aligned} \quad (5.102)$$

definiert ist, lassen sich aufgrund der oft zu strengen und damit der Physik widersprechenden Voraussetzungen nicht anwenden, sofern diese Sätze überhaupt auf die betrachtete Problemgleichung bezogen werden können.

Als Beispiel für eine solche Abschätzung betrachten wir Satz 31 und ein *eindimensionales* mechanisches Problem mit Verschiebungsgradienten H^ε . Die Einschränkung auf eine Raumdimension erleichtert uns die Anwendung, da der betrachtete Satz nur für Folgen mit Werten im \mathbb{R}^1 formuliert ist. Für die garantierte (zweiskalige) Unterhalbstetigkeit der freien Energiefunktion im Falle von $\varepsilon \rightarrow 0$ muß es zwei Konstanten c und C geben, so daß die quadratische Wachstumsbedingung $c|H^\varepsilon|^2 \leq \psi(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}, H^\varepsilon) \leq C(1 + |H^\varepsilon|^2)$ erfüllt ist. Wenn wir eine längliche Probe anhaltend so stark komprimieren, daß der deformierte Körper gegen einen Massenpunkt strebt, so kann H^ε für jedes $\varepsilon > 0$ stets beschränkt gewählt werden. Physikalisch muß die freie Energie jedoch gegen Unendlich streben, was dem angenommenen quadratischen Wachstum von ψ in H^ε widerspricht.

Ein weiteres bekanntes Problem bei der Anwendung von (schwacher) Unterhalbstetigkeit stellt die dort oftmals geforderte Konvexität von ψ bezüglich H^ε dar. In der Literatur lassen sich zwar Aussagen finden, welche bereits für polykonvexe Funktionale eine Abschätzungsaussage für den Übergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefern, doch fordern diese erneut Wachstumsbedingungen, welche die freie Energie bezüglich der Verschiebungsnorm oder der Norm des Verschiebungsgradienten nach oben beschränken. Als Beispiele für solche Veröffentlichungen dienen [63], [82] und [32].

Damit zeigt sich, daß die umfassende Arbeit [79], in der mithilfe der Zweiskalenkonvergenz ein scheinbar geschlossenes und physikalisch sinnvolles Ergebnis für den Zweiskalengrenzwert der Gesamtenergie gewonnen wird, sowie darauf aufbauende Publikationen wie [80], [81], [54], [85] und [86] im allgemeinen nicht korrekt sein können. Der dort für das periodische Problem $\psi^\varepsilon := \psi(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}, \mathbf{C}^\varepsilon)$ mit der allgemeinen polykonvexen freien Energiefunktion $\psi(\mathbf{X}, \mathbf{C})$ vorgenommene Schritt

$$2(\mathbf{I} + \mathbf{H}^\varepsilon) \cdot \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \mathbf{C}^\varepsilon} \xrightarrow{\text{zweiskalig}} 2(\mathbf{I} + \mathbf{H}^0) \cdot \frac{\partial \psi^0}{\partial \mathbf{C}^0} \quad (5.103)$$

kann nicht nachvollzogen werden. Daß die Simulationen in diesen Veröffentlichungen ähnliche Ergebnisse liefern wie vergleichbare Rechnungen, welche auf anderen Homogenisierungsmethoden basieren, liegt vermutlich an der Tatsache, daß das fehlerhaft hergeleitete Gleichungs-

system grundsätzlich ein in der Literatur erprobtes numerisches Homogenisierungsschema darstellt.

Linearisierte St. Venant-Kirchhoff-Materialien

Um überhaupt ein vollständiges Zweiskalenproblem betrachten zu können, schränken wir die Spannungsgleichung weiter ein und betrachten die Spannungs-Dehnungs-Beziehung (5.101) bezüglich der Linearisierung des Verzerrungsmaßes \mathbf{E}^ε . Damit transformiert sich der Ausdruck $\mathbf{E}^\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{\varepsilon T} \cdot \mathbf{F}^\varepsilon - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{H}^\varepsilon + \mathbf{I})^T \cdot (\mathbf{H}^\varepsilon + \mathbf{I}) - \mathbf{I})$ in die bekannte lineare Größe $\mathbf{E}_{lin}^\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon)$. Insgesamt folgt unter dieser Einschränkung für den zweiten Piola-Kirchhoff-Tensor die approximative Beziehung

$$\hat{\mathbf{P}}^\varepsilon(\mathbf{H}^\varepsilon) \approx \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \left\{ \text{Sp} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon) \right) \right\} \mathbf{I} + \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon). \quad (5.104)$$

Genauso erhalten wir als Linearisierung des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors vermöge der Beziehung $\mathbf{P}^\varepsilon = \mathbf{F}^\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{P}}^\varepsilon = (\mathbf{H}^\varepsilon + \mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{P}}^\varepsilon$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{H}^\varepsilon) &\approx (\mathbf{H}^\varepsilon + \mathbf{I}) \cdot \left[\lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \left\{ \text{Sp} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon) \right) \right\} \mathbf{I} + \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon) \right] \\ &\approx \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \left\{ \text{Sp} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon) \right) \right\} \mathbf{I} + \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon) \\ &= \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) (\text{Sp} \mathbf{H}^\varepsilon) \mathbf{I} + \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) (\mathbf{H}^{\varepsilon T} + \mathbf{H}^\varepsilon) \\ &\hat{=} \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) H_{kk}^\varepsilon \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) (H_{ji}^\varepsilon + H_{ij}^\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.105)$$

Konvergenz von P bei linearisierten St. Venant-Kirchhoff-Materialien - Ansatz I

Beim ersten Ansatz versuchen wir, die Konvergenzresultate des Produktsatzes 25 auf das linearisierte Modell anzuwenden. Wir erinnern uns daran, daß für feste $i, j = 1, 2, 3$ im Fall von $\varepsilon \rightarrow 0$ die Konvergenz $H_{ij}^\varepsilon \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \frac{\partial u_i^0}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^1}{\partial Y_j} \in L^2(\mathcal{R} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ gilt. Als weitere Größen kommen in (5.105) die beiden Folgen $\{\lambda^\varepsilon\}$ und $\{\mu^\varepsilon\}$ mit $\lambda^\varepsilon := \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right)$ und $\mu^\varepsilon := \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right)$ hinzu.

Wir dürfen ohne Beschränkung der mechanischen Allgemeinheit die Lagebeziehungen $\lambda(\mathbf{Y})$ und $\mu(\mathbf{Y}) \in L_{per}^4(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ annehmen, da beide Funktionen per Definition stückweise konstant sind. Damit liegen ihre Quadrate $(\lambda)^2(\mathbf{Y})$ und $(\mu)^2(\mathbf{Y})$ im Raum $L_{per}^2(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$. Zusätzlich gilt $0 < \lambda^\varepsilon, \mu^\varepsilon < +\infty$, da im Wertebereich beider Funktionen im Fall der hier vorliegenden linearen Elastizität die (positiven) Lamé-Konstanten liegen.

Zusammengenommen gelten damit nach Lemma 30 die Konvergenzen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left| \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \right| d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} |\lambda(\mathbf{Y})| d\mathbf{Y} d\mathbf{X}, \quad (5.106)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left| \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \right| d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} |\mu(\mathbf{Y})| d\mathbf{Y} d\mathbf{X}, \quad (5.107)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left| \lambda^2 \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \right| d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} |\lambda^2(\mathbf{Y})| d\mathbf{Y} d\mathbf{X}, \quad (5.108)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left| \mu^2 \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \right| d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} |\mu^2(\mathbf{Y})| d\mathbf{Y} d\mathbf{X}, \quad (5.109)$$

wobei die Betragsstriche aufgrund der Positivität aller Funktionen weggelassen werden können. Aufgrund von Satz 20 wissen wir, daß die linken Seiten der beiden Gleichungen (5.106) und (5.107) zweiskalig konvergieren. Mit der Eins als zulässiger Funktion lassen sich damit die Zweiskalengrenzwerte von $\left\{ \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \right\}$ und $\left\{ \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \right\}$ bis auf eine Teilfolge mit $\lambda(\mathbf{Y})$ und $\mu(\mathbf{Y})$, identifizieren. Damit folgt aus Satz 25 für jedes $i, j, k = 1, 2, 3$ und für alle $\phi(\mathbf{X}) \in C_0^\infty(\mathcal{R}_{\mathcal{R}})$ die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (\lambda^\varepsilon H_{kk}^\varepsilon) \phi d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \lambda H_{kk}^0 d\mathbf{Y} \right) \phi d\mathbf{X}, \quad (5.110)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (\mu^\varepsilon H_{ij}^\varepsilon) \phi d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mu H_{ij}^0 d\mathbf{Y} \right) \phi d\mathbf{X}. \quad (5.111)$$

Dementsprechend multiplizieren wir die noch zu lösende Gleichung (5.41) unseres Gesamtproblems mit einer beliebigen Funktion $\phi(\mathbf{X}) \in C_0^\infty(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Mit der Einschränkung auf linearisierte St. Venant-Kirchhoff-Materialien und unter Berücksichtigung der Zweiskalenkonvergenz von $\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X})$ folgt damit für alle $\phi(\mathbf{X}) \in C_0^\infty(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left\{ 2(\mathbf{I} + \mathbf{H}^\varepsilon) \cdot \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \mathbf{C}^\varepsilon} - \mathbf{P}^\varepsilon \right\} : \phi d\mathbf{X} \\ &\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left\{ \lambda^\varepsilon (\text{Sp } \mathbf{H}^\varepsilon) \mathbf{I} + \mu^\varepsilon (\mathbf{H}^{\varepsilon^T} + \mathbf{H}^\varepsilon) - \mathbf{P}^\varepsilon \right\} : \phi d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \lambda (\text{Sp } \mathbf{H}^0) \mathbf{I} + \mu (\mathbf{H}^{0^T} + \mathbf{H}^0) - \mathbf{P}^0 d\mathbf{Y} \right\} : \phi d\mathbf{X} \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \lambda \left(\text{Sp} \mathbf{H}^0 \right) \mathbf{I} + \mu \left(\mathbf{H}^{0^T} + \mathbf{H}^0 \right) d\mathbf{Y} - \mathbf{P}^M \right\} : \boldsymbol{\phi} d\mathbf{X}, \quad (5.112)$$

wobei ausgenutzt wurde, daß $\langle \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_{\mathbf{Y}}$ durch $\mathbf{P}^M(\mathbf{X})$ gegeben ist. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung gilt fast überall in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die makroskopische Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \left\langle \lambda(\mathbf{Y}) \left(\text{Sp} \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) \mathbf{I} + \mu(\mathbf{Y}) \left(\mathbf{H}^{0^T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) \right\rangle_{\mathbf{Y}} - \mathbf{P}^M(\mathbf{X}). \quad (5.113)$$

Demnach erhalten wir die makroskopische Spannung in Form des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors durch Volumenmittelung über ein linearisiertes St. Venant-Kirchhoff-Material. Leider garantiert uns Satz 25 nicht die lokale Gültigkeit des verwendeten St. Venant-Kirchhoff-Materials in $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ und führt damit auf der mikroskopischen Ebene zu keiner expliziten Darstellung von \mathbf{P}^0 , wodurch sich das linearisierte Gesamtproblem weiterhin nicht vollständig beschreiben läßt.

Konvergenz von \mathbf{P} bei linearisierten St. Venant-Kirchhoff-Materialien - Ansatz II

Der zweite Ansatz führt unter stärkeren Regularitätsbedingungen an die beiden Funktionen $\lambda(\mathbf{Y})$ und $\mu(\mathbf{Y})$ zu einer echten zweiskaligen Formulierung. Es seien $\lambda(\mathbf{Y})$ und $\mu(\mathbf{Y})$ beide in $L_{per}^{\infty}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ gegeben. Für Lamé-Konstanten stellt diese Anforderung aufgrund ihrer stückweise konstanten Verläufe keine Einschränkung dar. Das Produkt $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\lambda(\mathbf{Y})$ liegt für beliebige Funktionen $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ in $C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; L_{per}^{\infty}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}))$ und stellt damit gemäß Satz 16 eine zulässige Testfunktion dar. Analoges gilt für das Produkt $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mu(\mathbf{Y})$. Wir definieren $\lambda^{\varepsilon} := \lambda\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ sowie $\mu^{\varepsilon} := \mu\left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right)$ und multiplizieren die noch zu lösende Gleichung (5.41) für alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$ komponentenweise mit einer beliebigen Funktion $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$. Anmerkung 19 und das Wissen, daß sowohl \mathbf{P}^{ε} als auch \mathbf{H}^{ε} bis auf eine Teilfolge zweiskalig konvergieren, führt für alle $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ auf die Aussage

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left\{ 2 \left(\delta_{ij} + H_{ij}^{\varepsilon} \right) \frac{\partial \psi_{ijkl}^{\varepsilon}}{\partial C_{kl}^{\varepsilon}} - P_{ij}^{\varepsilon} \right\} \boldsymbol{\phi} d\mathbf{X} \\ &\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left\{ \lambda^{\varepsilon} H_{kk}^{\varepsilon} \delta_{ij} + \mu^{\varepsilon} \left(H_{ji}^{\varepsilon} + H_{ij}^{\varepsilon} \right) - P_{ij}^{\varepsilon} \right\} \boldsymbol{\phi} d\mathbf{X} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left(H_{kk}^{\varepsilon} \delta_{ij} \right) (\boldsymbol{\phi} \lambda^{\varepsilon}) + \left(H_{ji}^{\varepsilon} + H_{ij}^{\varepsilon} \right) (\boldsymbol{\phi} \mu^{\varepsilon}) - P_{ij}^{\varepsilon} \boldsymbol{\phi} d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \left(H_{kk}^0 \delta_{ij} \right) (\boldsymbol{\phi} \lambda) + \left(H_{ji}^0 + H_{ij}^0 \right) (\boldsymbol{\phi} \mu) - P_{ij}^0 \boldsymbol{\phi} d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \left\{ \lambda H_{kk}^0 \delta_{ij} + \mu \left(H_{ji}^0 + H_{ij}^0 \right) - P_{ij}^0 \right\} \phi \, dY \, dX . \quad (5.114)$$

Da $C_0^\infty(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}) \subset C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ erfüllt ist, erhalten wir mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Beziehung

$$\lambda H_{kk}^0 \delta_{ij} + \mu \left(H_{ji}^0 + H_{ij}^0 \right) - P_{ij}^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} , \quad (5.115)$$

welche für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ die mikroskopische Aussage

$$0 \stackrel{!}{=} \lambda(\mathbf{Y}) \left(\text{Sp} \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) \mathbf{I} + \mu(\mathbf{Y}) \left(\mathbf{H}^{0^T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) - \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (5.116)$$

fast überall in $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ impliziert. Damit haben wir eine lokale Darstellung für \mathbf{P}^0 gefunden und können das Gesamtproblem in geschlossener Form darstellen.

Das vollständige Zweiskalenproblem bei linearisierten St. Venant-Kirchhoff-Materialien

Makroskopisches Problem

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \nabla + \bar{\rho}_0^M \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}} , \quad (5.117)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) - \mathbf{H}^M(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_{\mathcal{R}} , \quad (5.118)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^\sigma , \quad (5.119)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^M(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}) - \mathbf{t}^0(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u , \quad (5.120)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u . \quad (5.121)$$

Volumenmittelwerte

$$\mathbf{P}^M(\mathbf{X}) := \left\langle \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\rangle_Y , \quad (5.122)$$

$$\mathbf{H}^M(\mathbf{X}) := \left\langle \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\rangle_Y , \quad (5.123)$$

$$\bar{\rho}_0^M := \left\langle \bar{\rho}_0(\mathbf{Y}) \right\rangle_Y . \quad (5.124)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \nabla_{\mathbf{Y}} \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (5.125)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (5.126)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \lambda(\mathbf{Y}) \left(\text{Sp} \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) \mathbf{I} + \mu(\mathbf{Y}) \left(\mathbf{H}^{0^T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) - \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

fast überall in $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}, \quad (5.127)$

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \text{ ist bezüglich } \mathbf{Y} \text{ } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}\text{-periodisch.} \quad (5.128)$$

Die Randbedingungen des mikroskopischen Problems sind durch die $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität der Verschiebungsgröße \mathbf{u}^1 implizit gegeben. Die Spannung \mathbf{P}^0 ist aufgrund der vorliegenden Spannungs-Dehnungsbeziehung im zweiten Argument $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch.

5.6.2 Isotrope kompressible Neo-Hooke-Materialien für große Deformationen

Zur Beschreibung großer Deformationen verwenden wir ein polykonvexes hyperelastisches Materialmodell gemäß [12]. Dort ist der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor für isotropes, kompressibles Materialverhalten durch

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{X}) = \mu \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^{T-1}(\mathbf{X}) \right) + \lambda \det \mathbf{F}(\mathbf{X}) (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}) - 1) \left(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^{T-1}(\mathbf{X}) \right) \quad (5.129)$$

gegeben. Dabei stellen λ und μ elastische Materialparameter dar. Legen wir eine periodische Mikrostruktur zugrunde, so folgt daraus mit $\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{X})$ die Darstellung

$$\hat{\mathbf{P}}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \mu^\varepsilon(\mathbf{X}) \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{\varepsilon-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^{\varepsilon T-1}(\mathbf{X}) \right) + \lambda^\varepsilon(\mathbf{X}) \det \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) (\det \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) - 1) \left(\mathbf{F}^{\varepsilon-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^{\varepsilon T-1}(\mathbf{X}) \right). \quad (5.130)$$

$\lambda^\varepsilon(\mathbf{X}) := \lambda \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right)$ und $\mu^\varepsilon := \mu \left(\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right)$ sind nun Funktionen, welche jedem Punkt $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ dessen elastische Materialparameter λ und μ zuordnen. Gemäß der allgemeinen Transformationsbeziehung $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{P}}$ ergibt sich der gesuchte erste Piola-Kirchhoff-Tensor zu

$$\mathbf{P}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \mu^\varepsilon(\mathbf{X}) \left(\mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) - \mathbf{F}^{\varepsilon T-1}(\mathbf{X}) \right) + \lambda^\varepsilon(\mathbf{X}) \det \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) (\det \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) - 1) \mathbf{F}^{\varepsilon T-1}(\mathbf{X}). \quad (5.131)$$

Es gelten weiterhin die in Kapitel 5.5 hergeleiteten zweiskaligen Gleichungen (5.84) bis (5.94). Lediglich das neue Spannungs-Dehnungs-Gesetz muß im Rahmen der Zweiskalenkonvergenz

separat betrachtet werden, sofern für die anderen Problemgrößen keine weiteren speziellen Annahmen getroffen werden.

Zweiskalenkonvergenz der Spannungs-Dehnungs-Beziehung (5.131) mit Hilfe eines asymptotischen Ansatzes für $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})$

Wir nehmen die Koeffizienten $\lambda^\varepsilon(\mathbf{X})$ und $\mu^\varepsilon(\mathbf{X})$ erneut im Raum $L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ an, um sie während der Zweiskalenbetrachtung an eine zulässige Testfunktion hängen zu können. Eine passende Handhabung der Nichtlinearitäten in Gleichung (5.131) gewähren wir mit dem folgenden asymptotischen Ansatz für das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) \approx \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \varepsilon \mathbf{u}^1\left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right), \quad (5.132)$$

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{X}) \in C^1\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3\right), \quad (5.133)$$

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in C_0^1\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \left[W_{per}^{1,\infty}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})\right]^3\right). \quad (5.134)$$

Wie wir weiter unten sehen werden, garantieren die höheren Regularitätseigenschaften der Funktionen \mathbf{u}^0 und \mathbf{u}^1 , daß ihre Gradienten als zulässige Testfunktionen im Zweiskalengrenzwertprozeß angesehen werden können. Natürlich kann unter diesen strengeren Anforderungen der Verschiebungsgradient \mathbf{H}^ε keine Sprünge mehr erfahren.

Zunächst zeigen wir, daß die Beziehungen (5.87), (5.88) und (5.93) mit dem asymptotischen Ansatz weiterhin erfüllt sind. Aus der Annahme (5.132) resultiert der Gradient

$$\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) \approx \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \left(\varepsilon \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\right)_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}}. \quad (5.135)$$

Zusammen mit dem Wissen, daß $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1$ eine zulässige Testfunktion ist, folgen mit Korollar 22 für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Konvergenz

$$\nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \varepsilon \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1\left(\mathbf{X}; \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}\right) - \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{X}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (5.136)$$

und damit insbesondere Gleichung (5.93) aus Kapitel 5.4. Gleichung (5.87) muß weiterhin gelten, da \mathbf{u}^1 auf dem Rand $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ definitionsgemäß verschwindet und damit nur \mathbf{u}^0 die Randvorgabe erfüllen kann. Gleichung (5.88) bleibt gültig, weil die Volumenmittelung des Gradienten $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1$ über $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$, wie in (5.66) und (5.67) bereits gezeigt worden ist, aufgrund der $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität von \mathbf{u}^1 verschwinden muß.

Als nächstes betrachten wir im Spannungs-Dehnungs-Gesetz (5.131) die invertierte Größe $\mathbf{F}^{\varepsilon T^{-1}} = (\mathbf{1} + \mathbf{H}^\varepsilon)^{T^{-1}}$. Das Transponieren eines Tensors ändert sein zweiskaliges Konvergenzverhalten im allgemeinen nur insofern, daß der Grenzwert der transponierten Folge gleich dem transponierten Grenzwert der eigentlichen Folge ist. Für die Zweiskalenkonvergenz einer Inversen ist ein solches Verhalten nicht offensichtlich. Wir nehmen an, daß sowohl die ursprüngliche Größe $\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}^\varepsilon$ als auch ihre Approximation $\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}^0 + \varepsilon \nabla_X \mathbf{u}^1 \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} + \nabla_Y \mathbf{u}^1 \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}}$ für jedes $\varepsilon > 0$ fast überall in $\mathcal{R}_\mathcal{R}$ invertierbar ist, da ansonsten keine gültigen Deformationsgradienten vorliegen würden. Da wir die Folge der (approximierten) Deformationsgradienten als beschränkt voraussetzen, muß dies auch für die Folge seiner Inversen gelten. Damit konvergiert letztere bis auf eine Teilfolge zweiskalig gegen einen Grenzwert $\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Es sei nun $\phi_{ij} \in C_0 \left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_\mathcal{R}) \right)$ beliebig gewählt. Wir betrachten den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta_{jk} + \frac{\partial u_j^0}{\partial X_k}(\mathbf{X}) + \varepsilon \frac{\partial u_j^1}{\partial X_k}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} + \frac{\partial u_j^1}{\partial Y_k}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} \right\} \phi_{ik} \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \\ &= \left\{ \delta_{jk} + \frac{\partial u_j^0}{\partial X_k}(\mathbf{X}) + \varepsilon \frac{\partial u_j^1}{\partial X_k}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} + \frac{\partial u_j^1}{\partial Y_k}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} \right\} \phi_{ki}^T \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (5.137)$$

Hier gelten aufgrund von (5.133) und (5.134) die Lagebeziehungen $\frac{\partial u_j^0}{\partial X_k} \in C(\mathcal{R}_\mathcal{R})$, $\frac{\partial u_j^1}{\partial X_k} \in C \left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; W_{per}^{1,\infty}(\mathcal{Y}_\mathcal{R}) \right)$ und $\frac{\partial u_j^1}{\partial Y_k} \in C_0^1 \left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_\mathcal{R}) \right)$. Den Einheitstensor δ_{jk} betrachten wir im Raum $C^\infty(\mathcal{R}_\mathcal{R})$. Damit sind

$$\delta_{jk} \phi_{ki}^T, \frac{\partial u_j^0}{\partial X_k} \phi_{ki}^T, \frac{\partial u_j^1}{\partial X_k} \phi_{ki}^T \text{ und } \frac{\partial u_j^1}{\partial Y_k} \phi_{ki}^T \in C_0 \left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_\mathcal{R}) \right), \quad (5.138)$$

weswegen die gesamte Gleichung (5.137) für jedes $i, j, k = 1, 2, 3$ als zulässige Testfunktion für die Zweiskalenkonvergenz angesehen werden kann. Weiter ist

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_\mathcal{R}} F_{ij}^{\varepsilon^{-1}}(\mathbf{X}) F_{jk}^\varepsilon(\mathbf{X}) \phi_{ik} \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{X} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_\mathcal{R}} F_{ij}^{\varepsilon^{-1}}(\mathbf{X}) F_{jk}^\varepsilon(\mathbf{X}) \phi_{ki}^T \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{X} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_\mathcal{R}} F_{ij}^{\varepsilon^{-1}}(\mathbf{X}) \underbrace{\left\{ \delta_{jk} + \frac{\partial u_j^0}{\partial X_k}(\mathbf{X}) + \frac{\partial u_j^1}{\partial Y_k}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Big|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} \right\}}_{=: \tilde{\phi}_{ij} \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) \text{ ist gemäß (5.138) zulässige Testfunktion}} \phi_{ki}^T \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} F_{ij}^{\varepsilon^{-1}}(\mathbf{X}) \varepsilon \left. \frac{\partial u_j^1}{\partial X_k}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right|_{\mathbf{Y}=\frac{\mathbf{X}}{\varepsilon}} \phi_{ki}^T \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{X}}_{=0, \text{ da } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ und Rest beschränkt}} \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} F_{ij}^{\varepsilon^{-1}}(\mathbf{X}) \tilde{\phi}_{ij} \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{X} \\
& = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} F_{ij}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \tilde{\phi}_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \\
& = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} F_{ij}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \left\{ \delta_{jk} + \frac{\partial u_j^0}{\partial X_k}(\mathbf{X}) + \frac{\partial u_j^1}{\partial Y_k}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\} \phi_{ki}^T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \\
& \stackrel{(5.96)}{=} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} F_{ij}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) F_{jk}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \phi_{ki}^T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \\
& = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} F_{ij}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) F_{jk}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \phi_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} . \tag{5.139}
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $\boldsymbol{\phi} \in C_0 \left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; [L^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})]^{3 \times 3} \right)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{I} : \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \mathbf{I} : \boldsymbol{\phi} \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{X} \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \left\{ \mathbf{F}^{\varepsilon^{-1}}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) \right\} : \boldsymbol{\phi} \left(\mathbf{X}, \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \right) d\mathbf{X} \\
& = \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} , \tag{5.140}
\end{aligned}$$

woraus mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{I} \tag{5.141}$$

fast überall in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ folgt. Damit ist \mathbf{F}^0 fast überall in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ invertierbar und der Zweiskalengrenzwert \mathbf{F}^* der Folge $\left\{ \mathbf{F}^{\varepsilon^{-1}} \right\}$ kann mit der Inversen von \mathbf{F}^0 fast überall in $\mathcal{R}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$

identifiziert werden. Mit dieser Überlegung kann in Gleichung (5.131) die Zweiskalenkonvergenz von $\mathbf{F}^{\varepsilon^{T-1}}$ gemäß

$$\mathbf{F}^{\varepsilon^{T-1}} \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \mathbf{F}^{0^{T-1}} \quad (5.142)$$

vollzogen werden.

Als letztes müssen wir Produkte partieller Ableitungen diskutieren. Für den Ausdruck $\det \mathbf{F}^\varepsilon (\det \mathbf{F}^\varepsilon - 1) \mathbf{F}^{\varepsilon^{T-1}}$ folgt mit der Identität $\det A_{ij} = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} & e_{klm} F_{1k}^\varepsilon F_{2l}^\varepsilon F_{3m}^\varepsilon \left(e_{nop} F_{1n}^\varepsilon F_{2o}^\varepsilon F_{3p}^\varepsilon - 1 \right) F_{ij}^{\varepsilon^{T-1}} \\ &= e_{klm} \left\{ \left(\delta_{1k} + \frac{\partial}{\partial X_k} u_1^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_k} u_1^1 + \frac{\partial}{\partial Y_k} u_1^1 \right) \left(\delta_{2l} + \frac{\partial}{\partial X_l} u_2^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_l} u_2^1 + \frac{\partial}{\partial Y_l} u_2^1 \right) \right. \\ & \quad \left(\delta_{3m} + \frac{\partial}{\partial X_m} u_3^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_m} u_3^1 + \frac{\partial}{\partial Y_m} u_3^1 \right) \left[e_{nop} \left(\delta_{1n} + \frac{\partial}{\partial X_n} u_1^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_n} u_1^1 + \frac{\partial}{\partial Y_n} u_1^1 \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(\delta_{2o} + \frac{\partial}{\partial X_o} u_2^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_o} u_2^1 + \frac{\partial}{\partial Y_o} u_2^1 \right) \left(\delta_{3p} + \frac{\partial}{\partial X_p} u_3^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_p} u_3^1 + \frac{\partial}{\partial Y_p} u_3^1 \right) - 1 \right] \right\} \\ & F_{ij}^{\varepsilon^{T-1}}. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Das Ausmultiplizieren der geschweiften Klammer in Gleichung (5.143) führt auf Produkte, in denen verschiedene partielle Ableitungen der beiden Funktionen \mathbf{u}^0 und \mathbf{u}^1 miteinander multipliziert werden. Laut Definition liegen die partiellen Ableitungen von \mathbf{u}^1 mindestens im Raum $C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}))$ und die partiellen Ableitungen von \mathbf{u}^0 befinden sich im Raum $C(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^3)$. Damit befinden sich alle auftretenden Faktoren dieses Produkts im Raum $C_0(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}))$. Folglich kann die gesamte geschweifte Klammer gemäß Satz 16 als eine zulässige Testfunktion aufgefaßt werden. Die Anwendung der Zweiskalenkonvergenz liefert in diesem Fall unter Beachtung von Gleichung (5.142) den Ausdruck

$$\begin{aligned} (5.143) & \xrightarrow{\text{zweiskalig}} e_{klm} \left(\delta_{1k} + \frac{\partial}{\partial X_k} u_1^0 + \frac{\partial}{\partial Y_k} u_1^1 \right) \left(\delta_{2l} + \frac{\partial}{\partial X_l} u_2^0 + \frac{\partial}{\partial Y_l} u_2^1 \right) \\ & \quad \left(\delta_{3m} + \frac{\partial}{\partial X_m} u_3^0 + \frac{\partial}{\partial Y_m} u_3^1 \right) \left[e_{nop} \left(\delta_{1n} + \frac{\partial}{\partial X_n} u_1^0 + \frac{\partial}{\partial Y_n} u_1^1 \right) \right. \\ & \quad \left. \left(\delta_{2o} + \frac{\partial}{\partial X_o} u_2^0 + \frac{\partial}{\partial Y_o} u_2^1 \right) \left(\delta_{3p} + \frac{\partial}{\partial X_p} u_3^0 + \frac{\partial}{\partial Y_p} u_3^1 \right) - 1 \right] (F_{ij}^0)^{T-1}. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Zusammengefaßt ergibt die Zweiskalenkonvergenz des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors \mathbf{P}^ε in Gleichung (5.131) die Grenzwertbeziehung

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \int_{\mathcal{R}_\mathcal{R}} \frac{1}{|\mathcal{Y}_\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{Y}_\mathcal{R}} \left\{ \mu(\mathbf{Y}) \left(\mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{F}^{0^{T-1}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda(\mathbf{Y}) \det \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \left(\det \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - 1 \right) \mathbf{F}^{0^{T-1}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\} : \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \\
&\quad \forall \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in C_0 \left(\mathcal{R}_\mathcal{R}; \left[L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_\mathcal{R}) \right]^{3 \times 3} \right), \tag{5.145}
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ist und wir zur Gewährleistung der gesamten Konvergenz die Materialkonstantenfunktionen μ^ε zu $\boldsymbol{\phi}$ sowie λ^ε zu $\det \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) (\det \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{X}) - 1)$ hinzugezählt haben.

Die fehlende konstitutive Gleichung, welche das mikroskopische Problem (5.92), (5.93) und (5.94) vollständig macht, schreibt sich mithilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung für fast jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_\mathcal{R}$ fast überall in $\mathcal{Y}_\mathcal{R}$ als

$$0 \stackrel{!}{=} \mu(\mathbf{Y}) \left(\mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{F}^{0^{T-1}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right) + \lambda(\mathbf{Y}) \det \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \left(\det \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - 1 \right) \mathbf{F}^{0^{T-1}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \tag{5.146}$$

6 Methode der Zweiskalenkonvergenz für mikropolare Kontinua

6.1 Grundgleichungen der mikropolaren Elastizität und deren lineare Darstellung im isotropen Fall

Mikropolare Materialien wurden am Anfang des 20. Jahrhunderts von den Gebrüdern Cosserat [21] eingeführt. Gut 60 Jahre später haben vor allem Untersuchungen von Eringen die Materie wieder aufgegriffen. Er liefert in [27] und [28] eine umfassende Übersicht der theoretischen Grundlagen. Bezüglich der Notation richten wir uns in dieser Arbeit hauptsächlich nach [35]. Die verwendeten linearisierten Gleichungen sind der Dissertation [26] entnommen worden.

Die Grundidee des mikropolaren Kontinuums besteht in dem Anheften eines zusätzlichen Vektors und damit dreier zusätzlicher Freiheitsgrade an jeden Punkt des betrachteten materiellen Körpers. Dieser Vektor Φ soll die Rotation einer dem Material innewohnenden Mikrostruktur widerspiegeln und wird mit dem sogenannten *mikropolaren Rotationstensor* \mathbf{R}_c gemäß $\varphi = \mathbf{R}_c \cdot \Phi$ von \mathcal{R}_R nach \mathcal{R}_t transformiert. Demnach wird die Gesamtdeformation eines mikropolaren Körpers durch die beiden Größen \mathbf{F} und \mathbf{R}_c beschrieben. Abbildung 6.1 verdeutlicht dies schematisch.

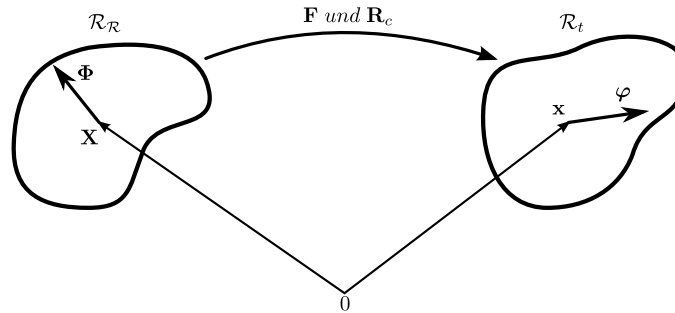


Abbildung 6.1: Wechsel von \mathcal{R}_R nach \mathcal{R}_t mit angeheftetem Rotationsvektor.

Die Einführung weiterer Freiheitsgrade und deren Deutung als Rotation haben weitreichende Konsequenzen für die Beschreibung des mechanischen Gesamtproblems. So führt die Drehimpulsbilanz auf eine zusätzliche Divergenzgleichung mit der neuen Größe der *Momentenspannung* σ_c , die auf dem Rand des Körpers einen *Momentenspannungsvektor* \mathbf{t}_c erzeugt, welcher analog zum Spannungsvektor \mathbf{t} in Richtung der Außennormale zeigt. Gleichzeitig wird auch eine spezifische *Volumenmomentendichte* \mathbf{b}_c eingeführt. Im Unterschied zur klassischen Theorie ist die Cauchyspannung σ im allgemeinen nicht mehr symmetrisch und beeinflusst die Drehimpulsbilanz vermöge des aus dem antisymmetrischen Tensors $\sigma - \sigma^T$ resultierenden axialen Vektors \mathbf{t}_A . Die additive Zerlegung $\mathbf{R}_c = \mathbf{H}_c + \mathbf{I}$ führt den *mikropolaren Verschiebungsgradienten* \mathbf{H}_c ein. Der Deformationsgradient \mathbf{F} lässt sich ähnlich der polaren Zerlegung speziell als $\mathbf{F} = \mathbf{R}_c \cdot \mathbf{U}_c$ schreiben, wobei der *mikropolare rechte Strecktensor* \mathbf{U}_c nicht symmetrisch ist. Für die Beschreibung isothermer Hyperelastizität sind der *mikropolare Verzerrungstensor* \mathbf{E}_c und der *mikropolare Krümmungstensor* \mathbf{K}_c ausreichend. Beide Deformationsmaße lassen sich durch \mathbf{U}_c und \mathbf{R}_c bestimmen, obwohl die Abhängigkeit von \mathbf{U}_c in den linearisierten Gleichungen nicht mehr explizit zu sehen ist.

Im Kapitel 5 über Hyperelastizität klassischer Materialien haben wir bereits festgestellt, daß sich nichtlineare Terme im Rahmen der Zweiskalenkonvergenz im allgemeinen nicht beschreiben lassen. Vielmehr konnten wir erst nach einer geeigneten Linearisierung oder mithilfe weiterer Ansätze wie der asymptotischen Entwicklung zufriedenstellende Ergebnisse erzielen. Deswegen möchten wir die Methode der Zweiskalenkonvergenz direkt auf ein lineares mikropolares Elastizitätsmodell mit isotropen Charakter anwenden. Es folgen die entsprechenden lokalen Gleichungen bezüglich der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t .

Impuls - und Drehimpulsbilanz

$$0 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \nabla + \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) \quad \text{in } \mathcal{R}_t, \quad (6.1)$$

$$0 = \boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{x}) \cdot \nabla + \mathbf{t}_A(\mathbf{x}) + \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{b}}_c(\mathbf{x}) \quad \text{in } \mathcal{R}_t. \quad (6.2)$$

Axialvektor von $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T$

$$t_{A_i}(\mathbf{x}) = e_{kli} \sigma_{lk}(\mathbf{x}) \quad \text{mit dem Permutationssymbol } e_{kli}. \quad (6.3)$$

Quadratische freie Energiefunktion

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{E}_c, \mathbf{K}_c) = & \lambda (\text{Sp } \mathbf{E}_c)^2 + (\mu + \alpha) \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c + (\mu - \alpha) \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c^T \\ & + \beta (\text{Sp } \mathbf{K}_c)^2 + (\gamma + \eta) \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{K}_c + (\gamma - \eta) \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{K}_c^T \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit den Materialkonstanten $\alpha, \beta, \eta, \gamma, \lambda$ und μ , wobei λ und μ weiterhin die bereits bekannten Lamé-Konstanten darstellen.

Hyperelastische Spannungsgesetze

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_c}(\mathbf{x}) = \lambda (\text{Sp } \mathbf{E}_c(\mathbf{x})) \mathbf{1} + (\mu + \alpha) \mathbf{E}_c(\mathbf{x}) + (\mu - \alpha) \mathbf{E}_c^T(\mathbf{x}), \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{x}) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{K}_c}(\mathbf{x}) = \beta (\text{Sp } \mathbf{K}_c(\mathbf{x})) \mathbf{1} + (\gamma + \eta) \mathbf{K}_c(\mathbf{x}) + (\gamma - \eta) \mathbf{K}_c^T(\mathbf{x}). \quad (6.6)$$

Mikropolare Deformationsmaße

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_c(\mathbf{x}) \quad \text{mit } \mathbf{H}_c = -\mathbf{H}_c^T, \quad (6.7)$$

$$H_{c_{ij}}(\mathbf{x}) = -e_{ijk} \xi_k(\mathbf{x}) \quad \text{und } \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (6.8)$$

$$\mathbf{K}_c(\mathbf{x}) = \nabla \xi(\mathbf{x}). \quad (6.9)$$

Dabei beschreibt ξ den axialen Vektor des antisymmetrischen Tensors \mathbf{H}_c . Mit der Kenntnis von ξ lassen sich damit \mathbf{H}_c und folgerichtig die mikropolare Rotation vermöge $\mathbf{R}_c = \mathbf{I} + \mathbf{H}_c$ bestimmen, woraus wiederum der aktuelle angeheftete Vektor $\varphi = \mathbf{R}_c \cdot \Phi$ berechnet werden kann. In Finite-Elemente-Rechnungen wird das Gesamtproblem stets bezüglich der beiden unbekannten Felder \mathbf{u} und ξ formuliert und dementsprechend gelöst.

Randbedingungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^u, \quad (6.10)$$

$$\xi(\mathbf{x}) = \bar{\xi}(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^\xi, \quad (6.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^\sigma, \quad (6.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}_c(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial \mathcal{R}_t^{\sigma_c}. \quad (6.13)$$

Dabei sollen die einzelnen Teilränder die Beziehungen $\partial \mathcal{R}_t^u \cup \partial \mathcal{R}_t^\sigma \cup \mathcal{N}_1 = \partial \mathcal{R}_t$, $\partial \mathcal{R}_t^\xi \cup \partial \mathcal{R}_t^{\sigma_c} \cup \mathcal{N}_2 = \partial \mathcal{R}_t$, $\partial \mathcal{R}_t^u \cap \partial \mathcal{R}_t^\sigma = \mathcal{N}_3$ und $\partial \mathcal{R}_t^\xi \cap \partial \mathcal{R}_t^{\sigma_c} = \mathcal{N}_4$ für Nullmengen $\mathcal{N}_i \subset \mathbb{R}^2$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ erfüllen. In der Literatur entsprechen diese Nullmengen meist allesamt der leeren Menge \emptyset .

6.2 Anwendung der Zweiskalenkonvergenz

Strukturell sind die Gleichungen der linearen isotropen mikropolaren Elastizität denen der klassischen Theorie ähnlich. Deswegen können wir dieselben Techniken zur Bestimmung der Zweiskalengrenzwerte und zur Aufteilung in ein mikro- und ein makroskopisches Problem anwenden. Zur besseren Übersicht sprechen wir jede Gleichung explizit an, sparen aber bereits erwähnte Details mit Hinweis auf die ursprüngliche Herleitung aus. Bevor wir jedoch mit dem Grenzwertprozeß beginnen können, müssen wir das mikropolare Modell mit der in Kapitel 3.2 beschriebenen periodischen Mikrostruktur unterlegen. Dabei werden auch die bisher konstanten Materialparameter für eine inhomogene periodische Materialstruktur angepaßt. Mit den Raumzugehörigkeiten

- $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{x}) \in \{\mathbf{M} | \mathbf{M} \in L^2(\mathcal{R}_t; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \text{ und } \mathbf{M} \cdot \nabla \in L^2(\mathcal{R}_t; \mathbb{R}^3)\}$
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{H}_c(\mathbf{x}), \mathbf{E}_c(\mathbf{x}), \mathbf{K}_c(\mathbf{x}) \in L^2(\mathcal{R}_t; \mathbb{R}^{3 \times 3})$
- $\mathbf{u}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \in H^1(\mathcal{R}_t; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}), \bar{\mathbf{b}}_c(\mathbf{x}) \in L^2(\mathcal{R}_t; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_t^u; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_t^\xi; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_t^\sigma; \mathbb{R}^3)$
- $\bar{\mathbf{t}}_c(\mathbf{x}) \in L^2(\partial \mathcal{R}_t^{\sigma_c}; \mathbb{R}^3)$
- $\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}), \bar{\rho}_0(\mathbf{x}) \in L_{per}^\infty(\mathcal{Y}_t)$

und den Definitionen

$$\begin{aligned} & \left\{ \alpha^\varepsilon(\mathbf{x}), \beta^\varepsilon(\mathbf{x}), \eta^\varepsilon(\mathbf{x}), \gamma^\varepsilon(\mathbf{x}), \lambda^\varepsilon(\mathbf{x}), \mu^\varepsilon(\mathbf{x}), \bar{\rho}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \right\} := \\ & \left\{ \alpha\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \beta\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \eta\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \gamma\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \lambda\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \mu\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \bar{\rho}_0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

ergeben sich, nachdem die Gleichungen (6.2) und (6.3) sowie (6.7) und (6.8) zusammengefaßt worden sind, komponentenweise die Gleichungen

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\varepsilon + \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{b}_i \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.15)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{cij}^\varepsilon + e_{kli} \sigma_{lk}^\varepsilon + \bar{\rho}_0^\varepsilon \bar{b}_{ci} \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.16)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \lambda^\varepsilon E_{c_{kk}}^\varepsilon \delta_{ij} + (\mu^\varepsilon + \alpha^\varepsilon) E_{cij}^\varepsilon + (\mu^\varepsilon - \alpha^\varepsilon) E_{cji}^\varepsilon - \sigma_{ij}^\varepsilon \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.17)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \beta^\varepsilon K_{c_{kk}}^\varepsilon \delta_{ij} + (\gamma^\varepsilon + \eta^\varepsilon) K_{cij}^\varepsilon + (\gamma^\varepsilon - \eta^\varepsilon) K_{cji}^\varepsilon - \sigma_{cij}^\varepsilon \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.18)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^\varepsilon - e_{ijk} \xi_k^\varepsilon - E_{cij}^\varepsilon \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.19)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i^\varepsilon - K_{cij}^\varepsilon \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.20)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{u}_i - u_i^\varepsilon \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^u, \quad (6.21)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{\xi}_i - \xi_i^\varepsilon \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^\xi, \quad (6.22)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{t}_i - \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^\sigma, \quad (6.23)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{t}_{ci} - \sigma_{cij}^\varepsilon n_j \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^{\sigma_c}. \quad (6.24)$$

Zweiskalenkonvergenz der Gleichungen (6.15) und (6.16)

Grundlegend unterscheiden sich (6.15) und (6.16) nur durch das auftreten des axialen Vektors $e_{kli} \sigma_{lk}^\varepsilon$, welcher bezüglich der Zweiskalenkonvergenz jedoch problemlos verarbeitet werden kann. Orientieren wir uns an der Argumentation zum zweiskaligen Grenzwert von Gleichung (5.36) in Kapitel 5.4, so folgen für beide Gleichungen die Konvergenzen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \bar{\rho}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \bar{b}_i(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{\rho}_0(\mathbf{y}) \bar{b}_i(\mathbf{x}), \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{cij}^\varepsilon(\mathbf{x}) + e_{kli} \sigma_{lk}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \bar{\rho}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \bar{b}_{ci}(\mathbf{x}) &\xrightarrow{\text{zweiskalig}} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{cij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e_{kli} \sigma_{lk}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad + \bar{\rho}_0(\mathbf{y}) \bar{b}_{ci}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (6.27)$$

$$\sigma_{cij}^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (6.28)$$

Dabei sind σ_{ij}^M und σ_{cij}^M durch die Volumenmittelwerte $\sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y$ und $\sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y$ definiert. Weiterhin gelten für die neu auftretenden Größen die Raumzugehörigkeiten $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\mathcal{R}_t \times \mathcal{Y}_t)$, $\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\sigma_{cij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\mathcal{R}_t; W_{per}(\mathcal{Y}_t))$, $\sigma_{ij}^M(\mathbf{x})$ und $\sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) \in L^2(\mathcal{R}_t)$.

Beim Aufspalten in mikro- und makroskopische Terme vernachlässigen wir erneut die Divergenzgleichungen der beiden Größen σ_{ij}^1 und σ_{cij}^1 aufgrund ihrer fluktuierenden Eigenschaft $\left\langle \sigma_{ij}^1 \right\rangle_y = 0 = \left\langle \sigma_{cij}^1 \right\rangle_y$ und betrachten stattdessen die Divergenzen der Zweiskalengrenzwerte σ_{ij}^0 und σ_{cij}^0 . Zusammengefaßt erhalten wir damit die Beziehungen

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) + \bar{\rho}_0^M \bar{b}_i(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.29)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) + e_{kli} \sigma_{lk}^M(\mathbf{x}) + \bar{\rho}_0^M \bar{b}_{ci}(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.30)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t \text{ für fast jedes } \mathbf{x} \in \mathcal{R}_t \text{ und} \quad (6.31)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t \text{ für fast jedes } \mathbf{x} \in \mathcal{R}_t \quad (6.32)$$

mit den Volumenmittlungen $\sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y$ und $\sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y \in L^2(\mathcal{R}_t)$ sowie $\bar{\rho}_0^M := \left\langle \bar{\rho}_0(\mathbf{y}) \right\rangle_y$.

Zweiskalenkonvergenz der Gleichungen (6.17) und (6.18)

Die Konvergenzbetrachtung der beiden linearen Spannungsgesetze verläuft analog zur Bestimmung von Gleichung (5.114) in Kapitel 5.6, bei der alle auftretenden Materialkonstanten an die zulässige Funktion angeheftet werden können. Es folgen damit die Konvergenzen

$$\begin{aligned} & \lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) E_{c_{kk}}^\varepsilon(\mathbf{x}) \delta_{ij} + (\mu^\varepsilon(\mathbf{x}) + \alpha^\varepsilon(\mathbf{x})) E_{cij}^\varepsilon(\mathbf{x}) + (\mu^\varepsilon(\mathbf{x}) - \alpha^\varepsilon(\mathbf{x})) E_{cji}^\varepsilon(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \\ & \lambda(\mathbf{y}) E_{c_{kk}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{ij} + (\mu(\mathbf{y}) + \alpha(\mathbf{y})) E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mu(\mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{y})) E_{cji}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} & \beta^\varepsilon(\mathbf{x}) K_{c_{kk}}^\varepsilon(\mathbf{x}) \delta_{ij} + (\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}) + \eta^\varepsilon(\mathbf{x})) K_{cij}^\varepsilon(\mathbf{x}) + (\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}) - \eta^\varepsilon(\mathbf{x})) K_{cji}^\varepsilon(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \\ & \beta(\mathbf{y}) K_{c_{kk}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{ij} + (\gamma(\mathbf{y}) + \eta(\mathbf{y})) K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\gamma(\mathbf{y}) - \eta(\mathbf{y})) K_{cji}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Da die makroskopischen Gleichungen bereits durch $\sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y$ und $\sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y$ gegeben sind, benötigen wir in diesem Abschnitt nur die mikroskopischen Varianten. Es folgen die Gleichungen

$$0 \stackrel{!}{=} \lambda(\mathbf{y}) E_{c_{kk}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{ij} + (\mu(\mathbf{y}) + \alpha(\mathbf{y})) E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mu(\mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{y})) E_{c_{ji}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

fast überall in \mathcal{Y}_t für fast jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$ und (6.35)

$$0 \stackrel{!}{=} \beta(\mathbf{y}) K_{c_{kk}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{ij} + (\gamma(\mathbf{y}) + \eta(\mathbf{y})) K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\gamma(\mathbf{y}) - \eta(\mathbf{y})) K_{c_{ji}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

fast überall in \mathcal{Y}_t für fast jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$. (6.36)

Zweiskalenkonvergenz der Gleichungen (6.19) und (6.20)

Die Struktur der beiden mikropolaren Deformationsmaße entspricht nicht ganz der klassischen Theorie aus Kapitel 5.4, obwohl wir auch an dieser Stelle direkt auf den Zweiskalengrenzwert schließen können. Zu beachten ist, daß in der zweiten Gleichung (6.20) der Gradient des Vektors ξ_i^ε auftaucht. Dadurch folgt bei entsprechend vorausgesetzter Beschränktheit der Folge $\{\xi_i^\varepsilon\}$ im Raum $H^1(\mathcal{R}_t)$, daß die Folge $\{\xi_i^\varepsilon\}$ – genauso wie in Kapitel 5.4 $\{u_i^\varepsilon\}$ gegen $u_i^0(\mathbf{x})$ – zweiskalig gegen eine rein makroskopische Funktion $\xi_i^0(\mathbf{x})$ konvergiert. Es folgen damit die Zweiskalengrenzwerte

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_j^\varepsilon(\mathbf{x}) - e_{ijk} \xi_k^\varepsilon(\mathbf{x}) - E_{cij}^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^0(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_i} u_j^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e_{ijk} \xi_k^0(\mathbf{x}) - E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ,$$

(6.37)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i^\varepsilon(\mathbf{x}) - K_{cij}^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_j} \xi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ,$$

(6.38)

wobei die Lagebeziehungen $u_i^0(\mathbf{x})$ und $\xi_i^0(\mathbf{x}) \in H^1(\mathcal{R}_t)$, $u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\xi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\mathcal{R}_t; W_{per}(\mathcal{Y}_t))$ sowie $E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\mathcal{R}_t \times \mathcal{Y}_t)$ erfüllt sind. Zusätzlich ergeben die Volumenmittelungen von u_j^1 und ξ_i^1 über \mathcal{Y}_t den Wert Null. Das Aufspalten in mikro- und makroskopische Terme ergibt ähnlich wie in Abschnitt 5.4.2 die Beziehungen

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^0(\mathbf{x}) - e_{ijk} \xi_k^0(\mathbf{x}) - E_{cij}^M(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t ,$$

(6.39)

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i^0(\mathbf{x}) - K_{cij}^M(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t ,$$

(6.40)

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^0(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_i} u_j^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e_{ijk} \xi_k^0(\mathbf{x}) - E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t \text{ für fast jedes } \mathbf{x} \in \mathcal{R}_t, \quad (6.41)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_j} \xi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t \text{ für fast jedes } \mathbf{x} \in \mathcal{R}_t, \quad (6.42)$$

wobei wir die Volumenmittelwerte $E_{cij}^M(\mathbf{x}) := \langle E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_y$ und $K_{cij}^M(\mathbf{x}) := \langle K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_y \in L^2(\mathcal{R}_t)$ definiert haben. Damit sind insbesondere die Tensoren E_{cij}^0 und K_{cij}^0 \mathcal{Y}_t -periodisch bezüglich \mathbf{y} .

Zweiskalenkonvergenz der Gleichungen (6.21), (6.22), (6.23) und (6.24)

Die Konvergenzen der Randbedingungen (6.21) bis (6.24) verlaufen analog zu der Vorgehensweise in den Abschnitten 5.4.3 bis 5.4.5. Es folgen damit die Zweiskalengrenzwerte

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}) - u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \bar{u}_i(\mathbf{x}) - u_i^0(\mathbf{x}), \quad (6.43)$$

$$\bar{\xi}_i(\mathbf{x}) - \xi_i^\varepsilon(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \bar{\xi}_i(\mathbf{x}) - \xi_i^0(\mathbf{x}) \quad (6.44)$$

$$\bar{t}_i(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \bar{t}_i(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}), \quad (6.45)$$

$$\bar{t}_{c_i}(\mathbf{x}) - \sigma_{cij}^\varepsilon(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{zweiskalig}} \bar{t}_{c_i}(\mathbf{x}) - \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}), \quad (6.46)$$

woraus die makroskopischen Randbedingungen

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{u}_i(\mathbf{x}) - u_i^0(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^u, \quad (6.47)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{\xi}_i(\mathbf{x}) - \xi_i^0(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^\xi, \quad (6.48)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{t}_i(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^\sigma, \quad (6.49)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{t}_{c_i}(\mathbf{x}) - \sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^{\sigma_c} \quad (6.50)$$

folgen. Damit sind die Gleichungen für das zweiskalige mikropolare lineare isotrope Elastizitätsproblem vollzählig.

Das vollständige Zweiskalenproblem bei mikropolarer linearer isotroper Elastizität

Makroskopisches Problem

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) + \bar{\rho}_0^M \bar{b}_i(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.51)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) + e_{kli} \sigma_{lk}^M(\mathbf{x}) + \bar{\rho}_0^M \bar{b}_{ci}(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.52)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^0(\mathbf{x}) - e_{ijk} \xi_k^0(\mathbf{x}) - E_{cij}^M(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.53)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i^0(\mathbf{x}) - K_{cij}^M(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{R}_t, \quad (6.54)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{u}_i(\mathbf{x}) - u_i^0(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^u, \quad (6.55)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{\xi}_i(\mathbf{x}) - \xi_i^0(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^\xi, \quad (6.56)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{t}_i(\mathbf{x}) - \sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^\sigma, \quad (6.57)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \bar{t}_{ci}(\mathbf{x}) - \sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \quad \text{fast überall auf } \partial \mathcal{R}_t^{\sigma_c}. \quad (6.58)$$

Volumenmittelwerte

$$\sigma_{ij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y, \quad (6.59)$$

$$\sigma_{cij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y, \quad (6.60)$$

$$\bar{\rho}_0^M := \left\langle \bar{\rho}_0(\mathbf{y}) \right\rangle_y, \quad (6.61)$$

$$E_{cij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y, \quad (6.62)$$

$$K_{cij}^M(\mathbf{x}) := \left\langle K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle_y. \quad (6.63)$$

Mikroskopisches Problem für fast jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t, \quad (6.64)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} & \lambda(\mathbf{y}) E_{c_{kk}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{ij} + (\mu(\mathbf{y}) + \alpha(\mathbf{y})) E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & + (\mu(\mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{y})) E_{c_{ji}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t, \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} & \beta(\mathbf{y}) K_{c_{kk}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{ij} + (\gamma(\mathbf{y}) + \eta(\mathbf{y})) K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & + (\gamma(\mathbf{y}) - \eta(\mathbf{y})) K_{c_{ji}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sigma_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t, \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j^0(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_i} u_j^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e_{ijk} \xi_k^0(\mathbf{x}) - E_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t, \quad (6.68)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial y_j} \xi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - K_{cij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_t. \quad (6.69)$$

Die Randbedingungen des mikroskopischen Problems sind durch die \mathcal{Y}_t -Periodizität der Deformationsgrößen \mathbf{u}^1 und ξ^1 implizit gegeben. Damit sind auch \mathbf{E}_c^0 sowie \mathbf{K}_c^0 und schließlich $\boldsymbol{\sigma}^0$ sowie $\boldsymbol{\sigma}_c^0$ \mathcal{Y}_t -periodisch im zweiten Argument.

7 Numerische Simulationen für isotrope kompressible Neo-Hooke-Elastizität unter großen Deformationen

7.1 Finite-Elemente-Formulierung des einkaligen Modells

In diesem Abschnitt bereiten wir das klassische einkalige Gesamtproblem unter Verwendung des isotropen kompressiblen Neo-Hooke-Modells aus Kapitel 5.6.2 für die Einbettung in die frei zugängliche Finite-Elemente-Umgebung *Elmer* [25] vor. Wir werden die schwache Formulierung der Impulsbilanz bezüglich der *Quasizeit* t , welche die schrittweise Auferlegung der äußeren Last steuert, linearisieren und die gesuchte Verschiebung \mathbf{u} sowie deren Variationen $\delta \mathbf{u}$ gemäß dem isoparametrischen Prinzip räumlich diskretisieren. Die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode sind in den bekannten englischsprachigen Standardwerken [89] und [90] sowie im deutschsprachigen Buch [13] genauer erläutert.

Im Zuge einer knappen Darstellung erwähnen wir die Eigenschaft *fast überall* in Zukunft nicht mehr explizit und ersetzen $\stackrel{!}{=}$ durch das einfache Gleichheitszeichen. Für den Fall, daß eine Funktion mehrere Darstellungen besitzt, wird die konkret gewünschte Abhängigkeit durch die explizite Angabe der Argumente gekennzeichnet. Das Symbol der Funktion soll nur in Sonderfällen abgeändert werden.

Linearisierung der schwachen Impulsbilanz

Für den gesamten Verlauf der numerischen Simulationen vernachlässigen wir die Volumenkräfte $\bar{\mathbf{b}}$ und setzen sie gleich Null. Damit erhalten wir aus Gleichung (5.84), welche auch für klassische einkalige Probleme gültig ist, die vereinfachte Impulsbilanz

$$0 = \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} . \quad (7.1)$$

Weiterhin betrachten wir zwei Arten von Randbedingungen: Entweder geben wir reine Verschiebungen vor – dann gilt $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^{\sigma} = \emptyset$ und folglich $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}} = \partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^u$ – oder wir lassen zusätzlich bestimmte Randabschnitte frei beweglich – dann gilt $\bar{\mathbf{t}} = 0$ auf ebendiesem Teilrand $\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^{\sigma}$. In beiden Fällen folgt für die schwache Formulierung von Gleichung (7.1) mit dem Satz von Gauß und der kinematisch verträglichen Verschiebungsvariation $\delta \mathbf{u}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} \delta u_i \, d\mathbf{X} \\ &= \int_{\partial \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i \, d\mathbf{X} - \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} P_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \, d\mathbf{X} \\ &= - \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} P_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \, d\mathbf{X} . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die Gesamtlast des statischen Problems wird in mehreren Quasizeitschritten inkrementell aufgetragen. Für jeden solchen Zeitschritt t definieren wir das Funktional

$$\mathcal{F}_t(\mathbf{u}) := - \int_{\mathcal{R}} P_{ij}(\mathbf{F}(\mathbf{u})) \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} dX, \quad (7.3)$$

dessen Lösung \mathbf{u}^t aufgrund von Gleichung (7.2) die Beziehung $\mathcal{F}_t(\mathbf{u}^t) = 0$ erfüllen muß. Die Lösung $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ des nächsten Zeitschritts $t + \Delta t$ gewinnen wir iterativ mit dem *Newton-Verfahren*, welches wir bezüglich der Unbekannten $\Delta \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t$ aufstellen. Die dazu benötigte Linearisierung

$$0 = \mathcal{F}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) \approx \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^t) + \delta \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^t)(\Delta \mathbf{u}^t) \quad (7.4)$$

ergibt sofort die bekannte Iterationsvorschrift

$$0 = \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^{(i)}) + \delta \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^{(i)})(\Delta \mathbf{u}^{(i)}), \quad (7.5)$$

wobei wir für den Iterationsindex $i = 0$ die Beziehung $u_k^{(0)} = u_k^t$ verwenden. Die in (7.5) benötigte erste Variation $\delta \mathcal{F}_t$ berechnet sich im allgemeinen durch

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_t(\mathbf{u})(\Delta \mathbf{u}) &= \left. \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}_t(\mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{u}) \right|_{\lambda=0} \\ &= - \frac{d}{d\lambda} \left[\int_{\mathcal{R}} P_{ij}(\mathbf{F}(\mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{u})) \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} dX \right]_{\lambda=0} \\ &= - \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}}(\mathbf{F}) \left[\frac{d}{d\lambda} F_{kl}(\mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{u}) \right]_{\lambda=0} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} dX \\ &= - \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}}(\mathbf{F}) \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\delta_{kl} + \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \lambda \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_l} \right) \right]_{\lambda=0} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} dX \\ &= - \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}}(\mathbf{F}) \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_l} \right) \right]_{\lambda=0} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} dX \\ &= - \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}}(\mathbf{F}) \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_l} dX, \end{aligned} \quad (7.6)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Ableitung des Deformationsgradienten gemäß [36] ersetzt haben. Insgesamt folgt damit für Gleichung (7.5) die Darstellung

$$0 = \left(\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} -P_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_k} \frac{\partial P_{ik}}{\partial F_{jl}} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_l} d\mathbf{X} \right)^{(i)}. \quad (7.7)$$

Der Tangententensor $\frac{\partial P_{ik}}{\partial F_{jl}}$ ist für das verwendete kompressible Neo-Hooke-Material durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ik}}{\partial F_{jl}} &= \frac{\partial}{\partial F_{jl}} \left[\mu (F_{ik} - F_{ik}^{T-1}) + \lambda \det \mathbf{F} (\det \mathbf{F} - 1) F_{ik}^{T-1} \right] \\ &= \mu \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial F_{jl}} - \frac{\partial F_{ik}^{T-1}}{\partial F_{jl}} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial F_{jl}} (\det \mathbf{F} - 1) F_{ik}^{T-1} \right. \\ &\quad \left. + \det \mathbf{F} \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial F_{jl}} F_{ik}^{T-1} + \det \mathbf{F} (\det \mathbf{F} - 1) \frac{\partial F_{ik}^{T-1}}{\partial F_{jl}} \right) \\ &= \mu \left(\delta_{ij} \delta_{kl} + F_{il}^{T-1} F_{jk}^{T-1} \right) + \lambda \left(\det \mathbf{F} (\det \mathbf{F} - 1) F_{jl}^{T-1} F_{ik}^{T-1} \right. \\ &\quad \left. + (\det \mathbf{F})^2 F_{jl}^{T-1} F_{ik}^{T-1} - \det \mathbf{F} (\det \mathbf{F} - 1) F_{il}^{T-1} F_{jk}^{T-1} \right) \\ &= \mu \left(\delta_{ij} \delta_{kl} + F_{il}^{T-1} F_{jk}^{T-1} \right) + \lambda \left[(\det \mathbf{F})^2 \left(2 F_{jl}^{T-1} F_{ik}^{T-1} - F_{il}^{T-1} F_{jk}^{T-1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \det \mathbf{F} \left(F_{jl}^{T-1} F_{ik}^{T-1} - F_{il}^{T-1} F_{jk}^{T-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

gegeben.

Diskretisierung der Linearisierung

Wir modellieren das gesamte Referenzgebiet $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ hinreichend genau mithilfe eines dreidimensionalen 8-knotigen Würfelements. Damit zerlegen wir Volumenintegrale gemäß

$$\int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} (*) d\mathbf{X} = \sum_e \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}^e} (*) d\mathbf{X}, \quad (7.9)$$

wobei e alle (endlich vielen) Würfelemente durchläuft und $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}^e$ das Gebiet eines solchen Elements bezeichnet. Für die Diskretisierung der gesuchten Funktion $\Delta u_i(\mathbf{X})$ verwenden wir *elementweise* lineare Formfunktionen $N_e^A(\mathbf{X})$. Im weiteren Verlauf verzichten wir weitestgehend auf den Elementindex e .

Der übliche Ansatz $\Delta u_i^{(i)} = \sum_A N^A \Delta u_i^{A(i)}$ und $\delta u_i = \sum_B N^B \delta u_i^B$ für $A, B = 1, \dots, 8$ mit den gesuchten konstanten Knotenverschiebungen $\Delta u_i^{A(i)}$ und der beliebigen konstanten Variation δu_i^B ergibt für jedes Element die Diskretisierung

$$0 = -\delta u_i^A \left[\int_{\mathcal{R}_e} P_{ij}^{(i)} \frac{\partial N^A}{\partial X_j} dX + \int_{\mathcal{R}_e} \frac{\partial N^A}{\partial X_k} \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial F_{jl}} \right)^{(i)} \frac{\partial N^B}{\partial X_l} dX \Delta u_j^{B(i)} \right]. \quad (7.10)$$

Die später verwendete Finite-Elemente-Umgebung *Elmer* erfordert eine Darstellung von (7.10) bezüglich der Gesamtverschiebung. Wir definieren die vektoriellen Größen $\bar{u}_{3(A-1)+i}^{(i)} := u_i^{A(i)}$, $\bar{\delta u}_{3(A-1)+i} := \delta u_i^A$ und $\bar{\Delta u}_{3(A-1)+i}^{(i)} := \Delta u_i^{A(i)}$ sowie die *Steifigkeitsmatrix* \mathbb{K} und das *Residuum* \mathbb{F} durch

$$\mathbb{K}_{3(A-1)+i, 3(B-1)+j}^{(i)} := \int_{\mathcal{R}_e} \frac{\partial N^A}{\partial X_k} \left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial F_{jl}} \right)^{(i)} \frac{\partial N^B}{\partial X_l} dX \quad \text{und} \quad (7.11)$$

$$\mathbb{F}_{3(A-1)+i}^{(i)} := \int_{\mathcal{R}_e} P_{ij}^{(i)} \frac{\partial N^A}{\partial X_j} dX. \quad (7.12)$$

Zur Berechnung der auftretenden Integrale benutzen wir das bekannte Verfahren der *Gaußquadratur*. Konkret wird jedes Elementintegral an 8 verschiedenen fest vorgegebenen Gaußpunkten mit passender Gewichtung ausgewertet.

Insgesamt folgt aus der Beziehung $\bar{\Delta u}_{3(B-1)+j}^{(i)} = \bar{u}_{3(B-1)+j}^{(i+1)} - \bar{u}_{3(B-1)+j}^{(i)}$ und der Beliebigkeit der Verschiebungsvariation $\bar{\delta u}_{3(A-1)+i}$ für jedes Element das iterative Gleichungssystem

$$\mathbb{K}_{3(A-1)+i, 3(B-1)+j}^{(i)} \bar{u}_{3(B-1)+j}^{(i+1)} = \mathbb{K}_{3(A-1)+i, 3(B-1)+j}^{(i)} \bar{u}_{3(B-1)+j}^{(i)} - \mathbb{F}_{3(A-1)+i}^{(i)}. \quad (7.13)$$

Diese elementweisen Gleichungen werden von *Elmer* für diesen einfachen Fall automatisch in das globale Gleichungssystem, welches den gesamten Körper $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ beschreibt, eingepflegt.

7.2 Numerisches Schema des homogenisierten Problems

In diesem kurzen Abschnitt betrachten wir das numerische Schema, mit dem das homogenisierte Problem gelöst werden kann. Wie bereits in dieser Arbeit angeklungen ist, ist das mikroskopische Problem der homogenisierten Lösung von der makroskopischen Ebene nicht losgelöst. Vielmehr existiert für (fast) jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ ein separates mikroskopisches Problem, welches sowohl von \mathbf{X} als auch von $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ abhängig ist. Bei der numerischen Umsetzung mithilfe Finiter Elemente führt dies zu einem verschachtelten numerischen Schema. Abbildung 7.1 deutet das Verfahren an.

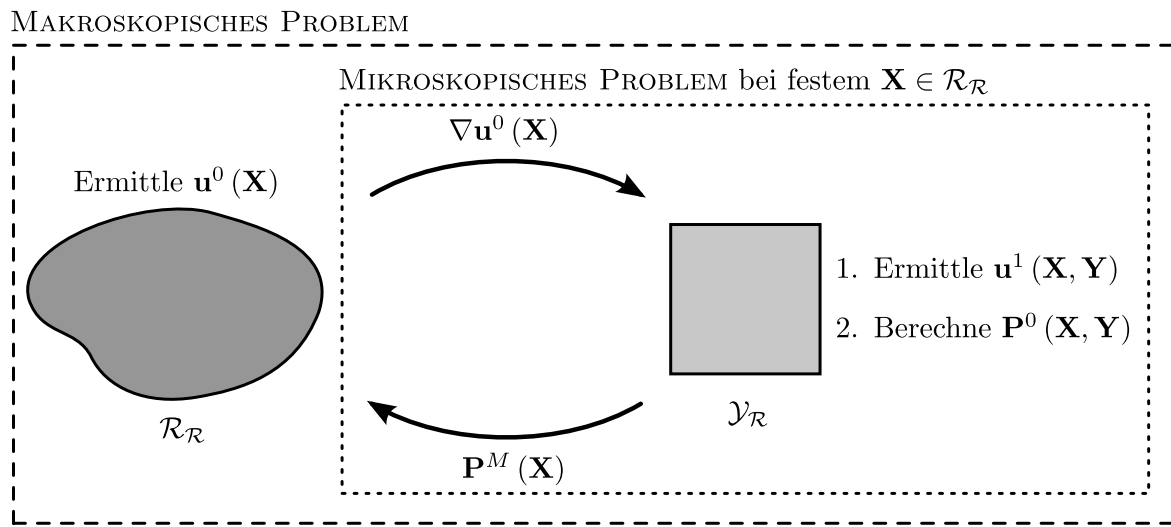


Abbildung 7.1: Numerisches Schema des homogenisierten Problems

So wird in der makroskopischen FEM für jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ der makroskopische Verschiebungsgradient an das zu \mathbf{X} korrespondierende Mikroproblem übermittelt. Das mikroskopische Problem führt mithilfe einer weiteren separaten FE-Rechnung zu einer Lösung \mathbf{u}^1 , mit deren Hilfe die Spannung \mathbf{P}^0 bestimmt werden kann. Der Mittelwert $\langle \mathbf{P}^0 \rangle_{\mathbf{Y}}$ ergibt schließlich die gesuchte makroskopische Spannungsantwort \mathbf{P}^M im betrachteten Punkt \mathbf{X} . Es kann zum nächsten makroskopischen Punkt übergegangen werden.

7.3 Finite-Elemente-Formulierung des mikroskopischen Problems

In diesem Abschnitt widmen wir uns der numerischen Umsetzung des mikroskopischen Problems (5.92) - (5.94) und (5.146). Besonderes Augenmerk werden wir auf die mikroskopischen Fluktuationen \mathbf{u}^1 legen, welche zunächst nicht eindeutig sind. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung (5.146) entspricht bei fest gehaltenem $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ der des klassisch einskaligen Problems aus Kapitel 7.1, wobei sie hier natürlich in $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ betrachtet wird. Mikroskopische Iterationsschritte bezeichnen wir mit einem hochgestellten (j) .

Linearisierung der mikroskopischen schwachen Impulsbilanz

Die schwache mikroskopische Impulsbilanz zum Quasizeitpunkt t schreibt sich für die mikroskopische Gesamtverschiebung, welche gemäß Kapitel 5.5 durch $\omega_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\partial u_i^0}{\partial X_j}(\mathbf{X})Y_j + u_i^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ gegeben ist, als

$$\mathcal{F}_t(\boldsymbol{\omega}) := - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} P_{ij}^0(\mathbf{F}^0(\boldsymbol{\omega})) \frac{\partial \delta \omega_i}{\partial Y_j} d\mathbf{Y} = 0. \quad (7.14)$$

Das Inkrement $\Delta \boldsymbol{\omega}$, welches die Verschiebungsdifferenz zwischen den beiden Quasizeitpunkten t und $t + \Delta t$ beschreibt, ist für feste \mathbf{X} bereits durch $\Delta \mathbf{u}^1$ bestimmt. Demnach ergibt sich die erste Variation von (7.14) zu

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\omega})(\Delta \boldsymbol{\omega}) &= \left. \frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\omega} + \lambda \Delta \mathbf{u}^1) \right|_{\lambda=0} \\ &= - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0}(\mathbf{F}^0(\boldsymbol{\omega})) \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\delta_{kl} + \frac{\partial u_k^0}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial Y_l} + \lambda \frac{\partial \Delta u_k^1}{\partial Y_l} \right) \right]_{\lambda=0} \frac{\partial \delta \omega_i}{\partial Y_j} d\mathbf{Y} \\ &= - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial \delta \omega_i}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0}(\mathbf{F}^0(\boldsymbol{\omega})) \frac{\partial \Delta u_k^1}{\partial Y_l} d\mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Da jede bezüglich u_i^1 zulässige Variation δu_i^1 auch bezüglich ω_i eine zulässige Variation darstellt, können wir während der Betrachtung der mikroskopischen Ebene den Ausdruck $\delta \omega_i^1$ auf δu_i^1 einschränken. Genauso dürfen wir die Abhängigkeit $\mathbf{F}^0(\boldsymbol{\omega})$ für feste \mathbf{X} auf $\mathbf{F}^0(\mathbf{u}^1)$ reduzieren. Damit folgen aus (7.14) und (7.15) die Beziehungen

$$\mathcal{F}_t(\mathbf{u}^1) = - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} P_{ij}^0(\mathbf{F}^0(\mathbf{u}^1)) \frac{\partial \delta u_i^1}{\partial Y_j} d\mathbf{Y} = 0 \quad \text{und} \quad (7.16)$$

$$\delta \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^1)(\Delta \mathbf{u}^1) = - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial \delta u_i^1}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0}(\mathbf{F}^0(\mathbf{u}^1)) \frac{\partial \Delta u_k^1}{\partial Y_l} dY . \quad (7.17)$$

Eindeutigkeit von \mathbf{u}^1 mithilfe einer globalen Kompatibilitätsbedingung unter Verwendung Lagrange'scher Multiplikatoren

Aus Kapitel 5.4 wissen wir, daß die mikroskopische Funktion \mathbf{u}^1 eine Äquivalenzklasse des teilfaktorisierten Sobolev-Raums $L^2\left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}}; \left[W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})\right]^3\right)$ repräsentiert. In jeder dieser Äquivalenzklassen liegen genau diejenigen Funktionen, welche sich im zweiten Argument durch eine additive Konstante voneinander unterscheiden. Um eindeutige numerische Lösungen zu garantieren, implementieren wir gemäß [18] und [80] die drei zusätzlichen *Kompatibilitätsbedingungen*

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{u}^1) := \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} u_i^1 dY \stackrel{!}{=} 0 . \quad (7.18)$$

Beziehung (7.18) wird ebenso durch die Charakterisierung des Raumes $W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ in Abschnitt 3.1 deutlich. Durch die Erzwingung von (7.18) setzen wir die unbestimmte additive Konstante von \mathbf{u}^1 gleich Null. Diese an sich beliebige Wahl beeinflusst die restlichen Gleichungen des Zweiskalenproblems nicht, da \mathbf{u}^1 dort nur als Gradient auftaucht. Im allgemeinen werden solche Nebenbedingungen *isoperimetrisch* genannt.

Numerisch lösen wir das durch (7.18) eingeschränkte mikroskopische Problem mithilfe der *Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren*. Dieses Verfahren ist für funktionale Minimierungsprobleme mit funktionalen Nebenbedingungen in [69] skizziert. Wir führen dazu das Funktional $\Pi(\mathbf{u}^1)$ ein, welches bei festem $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ formal für das Potential der hyperelastischen mikroskopischen Spannung stehen soll. Wie sprechen deshalb von einer formalen Größe, da $\Pi(\mathbf{u}^1)$ nicht aus einem Zweiskalengrenzwert des in Abschnitt 5.2 eingeführten Potentials für Materialien mit periodischer Mikrostruktur hergeleitet worden ist. Das betrachtete Funktional $\Pi(\mathbf{u}^1)$ muß mithilfe sogenannter *Lagrange'scher Multiplikatoren* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ und der gewünschten Nebenbedingung wie folgt zu einem Funktional $\tilde{\Pi}(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\alpha})$ erweitert werden:

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\alpha}) := \Pi(\mathbf{u}^1) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{u}^1) . \quad (7.19)$$

Für jede funktionale Nebenbedingung wird genau ein konstanter Multiplikator α_i eingeführt, welcher mathematisch als zusätzliche Unbekannte des zu lösenden Gesamtproblems aufzufassen ist. Für unser Problem sind dies demnach drei Stück. Physikalisch stehen Lagrange'sche Multiplikatoren für diejenigen Kräfte, welche dem unrestringierten Körper auferlegt werden müssen, damit er die geforderten Nebenbedingungen während der Deformation erfüllt.

Einarbeitung der periodischen Randbedingungen mithilfe Lagrange'scher Multiplikatoren

Das lineare Gleichungssystem, welches bei der numerischen Lösung eines unrestringierten hyperelastischen Randwertproblems entsteht, setzt sich zunächst aus Volumen- und Randanteilen zusammen. Dabei stehen die Randanteile im allgemeinen für die auferlegten Randbedingungen. Sie können isoliert und anschließend aus dem zu lösenden Gleichungssystem entfernt werden. Dadurch reduziert sich das lineare Gleichungssystem auf die bekannte Steifigkeitsmatrix mit entsprechender rechter Seite.

Für unser System ist eine solche Reduktion jedoch nicht mehr möglich, da sich die Nebenbedingung (7.18) über ganz $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ erstreckt und damit alle Freiheitsgrade oder besser alle Netzknoten aufgrund der benötigten numerischen Integration miteinander verknüpft. Daher muß die im mikroskopischen Problem vorliegende Randbedingung – die $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität von \mathbf{u}^1 – genauso mithilfe Lagrange'scher Multiplikatoren erzwungen werden. In diesem Fall sind die zusätzlichen Multiplikatoren nicht mehr konstant, sondern sie hängen im allgemeinen von \mathbf{Y} ab. Wir ersetzen $\tilde{\Pi}$ aus Gleichung (7.19) folglich durch das erweiterte Funktional

$$\hat{\Pi}(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^\kappa) := \Pi(\mathbf{u}^1) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{u}^1) + \sum_{\kappa=1}^3 \boldsymbol{\beta}^\kappa \cdot \mathcal{R}^\kappa(\mathbf{u}^1), \quad (7.20)$$

wobei der Operator \mathcal{R}^κ für jedes $\kappa = 1, 2, 3$ durch die Beziehung

$$\mathcal{R}_i^\kappa(\mathbf{u}^1) := u_i^{1+} - u_i^{1-} := u_i^1(\mathbf{Y}) - u_i^1(\mathbf{Y} + l_\kappa \mathbf{E}_\kappa) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{auf } \partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa \quad (7.21)$$

definiert ist. Dabei steht κ für die jeweils betrachtete Raumrichtung, l_κ für die Länge der Referenzeinheitszelle in diese Richtung, $\{\mathbf{E}_\kappa\}$ für die kanonische Basis und $\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa$ für den positiven Teilrand gemäß der zweidimensionalen Skizze (7.2). Die beiden zusätzlichen Anteile \mathcal{G}

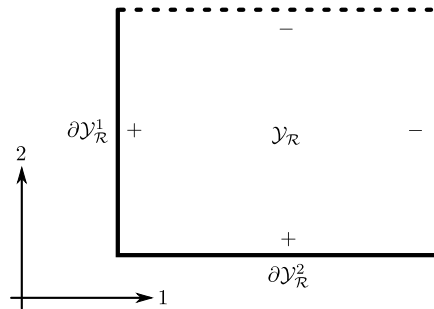


Abbildung 7.2: Periodische Ränder am Beispiel einer zweidimensionalen mikroskopischen Referenzeinheitszelle $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$.

und \mathcal{R}^κ aus Gleichung (7.20) unterscheiden sich bezüglich des verwendeten Skalarprodukts: Während wir \mathcal{G} und $\boldsymbol{\alpha}$ mittels des klassischen vektoriellen Skalarprodukts miteinander verknüpfen, verwenden wir zwischen \mathcal{R}^κ und $\boldsymbol{\beta}^\kappa$ komponentenweise das L^2 -Skalarprodukt mit dem

jeweils passenden Teilrand $\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa}$ als Grundmenge. Demnach schreibt sich der letzte Summand aus Gleichung (7.20) als

$$\sum_{\kappa=1}^3 \boldsymbol{\beta}^{\kappa} \cdot \mathcal{R}^{\kappa} \cong \sum_{\kappa=1}^3 \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa}} \beta_i^{\kappa} (u_i^{1+} - u_i^{1-}) dY. \quad (7.22)$$

Bestimmung der ersten Variation der Lagrange-Funktion $\hat{\Pi}$

Zur Lösung des eingeschränkten Problems müssen wir für die soeben gewonnene *Lagrange-funktion* $\hat{\Pi}$ einen stationären Punkt finden. Dabei ist die Wahl eines geeigneten numerischen Verfahrens aus zwei Gründen entscheidend [10]:

1. Stationäre Punkte von $\hat{\Pi}$ sind Sattelpunkte, weswegen klassische Verfahren wie der Gaußalgorithmus zum Auffinden von Extrempunkten versagen.
2. Im allgemeinen existieren mehrere stationäre Punkte von $\hat{\Pi}$, von denen nicht jeder eine Minimallösung des Ausgangsproblems darstellt.

Bevor wir auf diese beiden Probleme näher eingehen, bestimmen wir die erste Variation der Lagrange-Funktion $\hat{\Pi}(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{\kappa})$. Die Variation des Anteils Π ist durch die rechte Seite von Gleichung (7.16) gegeben. Für den Term $\tilde{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}^1) := \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{u}^1)$ lautet die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}^1)(\delta \boldsymbol{\alpha}, \delta \mathbf{u}^1) &= \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{u}^1) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \delta \mathcal{G}(\mathbf{u}^1) \\ &\cong \alpha_i \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta u_i^1 dY + \delta \alpha_i \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} u_i^1 dY. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Genauso folgt für den dritten Summanden $\tilde{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\beta}^{\kappa}, \mathbf{u}^1) := \boldsymbol{\beta}^{\kappa} \cdot \mathcal{R}^{\kappa}(\mathbf{u}^1)$ die Herleitung

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\beta}^{\kappa}, \mathbf{u}^1)(\delta \boldsymbol{\beta}^{\kappa}, \delta \mathbf{u}^1) &= \delta \boldsymbol{\beta}^{\kappa} \cdot \mathcal{R}^{\kappa}(\mathbf{u}^1) + \boldsymbol{\beta}^{\kappa} \cdot \delta \mathcal{R}^{\kappa}(\mathbf{u}^1)(\delta \mathbf{u}^1) \\ &\cong \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa}} \delta \beta_i^{\kappa} \mathcal{R}_i^{\kappa}(\mathbf{u}^1) dY + \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa}} \beta_i^{\kappa} \delta \mathcal{R}_i^{\kappa}(\mathbf{u}^1)(\delta \mathbf{u}^1) dY \\ &= \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa}} \delta \beta_i^{\kappa} (u_i^{1+} - u_i^{1-}) dY + \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa}} \beta_i^{\kappa} (\delta u_i^{1+} - \delta u_i^{1-}) dY, \end{aligned} \quad (7.24)$$

wobei wir verwendet haben, daß $\mathcal{R}_i^\kappa(\mathbf{u}^1)$ ein linearer Operator von $H^1(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}})$ nach $L^2(\partial\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa)$ ist und dadurch $\delta\mathcal{R}_i^\kappa(\mathbf{u}^1)(\delta\mathbf{u}^1)$ durch $\mathcal{R}_i^\kappa(\delta\mathbf{u}^1)$ gegeben ist. Damit ist die erste Variation $\delta\hat{\Pi} =: \mathcal{F}_t$ des Gesamtfunktionals durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^\kappa) = & \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} -P_{ij}^0(\mathbf{F}^0(\mathbf{u}^1)) \frac{\partial \delta u_i^1}{\partial Y_j} dY + \alpha_i \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta u_i^1 dY + \delta \alpha_i \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} u_i^1 dY \\ & + \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ \int_{\partial\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} \delta \beta_i^\kappa (u_i^{1+} - u_i^{1-}) dY + \int_{\partial\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} \beta_i^\kappa (\delta u_i^{1+} - \delta u_i^{1-}) dY \right\} \end{aligned} \quad (7.25)$$

bestimmt.

Linearisierung und Diskretisierung von \mathcal{F}_t

Zur Berechnung des nächsten Quasizeitschrittes $t + \Delta t$ muß gemäß dem Newton-Verfahren die Beziehung

$$0 = \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^{1(j)}, \boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}^{\kappa(j)}) + \delta \mathcal{F}_t(\mathbf{u}^{1(j)}, \boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}^{\kappa(j)}) (\Delta \mathbf{u}^{1(j)}, \Delta \boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \Delta \boldsymbol{\beta}^{\kappa(j)}) \quad (7.26)$$

erfüllt sein. Daraus folgt die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} -P_{ij}^0 \frac{\partial \delta u_i^1}{\partial Y_j} - \frac{\partial \delta u_i^1}{\partial Y_k} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} \frac{\partial \Delta u_j^1}{\partial Y_l} dY + (\alpha_i + \Delta \alpha_i) \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta u_i^1 dY \right. \\ & + \delta \alpha_i \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} (u_i^1 + \Delta u_i^1) dY + \sum_{\kappa=1}^3 \left[\int_{\partial\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} \delta \beta_i^\kappa (u_i^{1+} + \Delta u_i^{1+} - u_i^{1-} - \Delta u_i^{1-}) dY \right. \\ & \left. \left. + \int_{\partial\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} (\beta_i^\kappa + \Delta \beta_i^\kappa) \delta u_i^\kappa dY \right] \right\}^{(j)}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

wobei der Tangententensor $\frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0}$ für $F_{jl}^0 = H_{jl}^0 + \delta_{jl}$ wie in Gleichung (7.8) durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} = & \mu \left(\delta_{ij} \delta_{kl} + F_{il}^{0T-1} F_{jk}^{0T-1} \right) + \lambda \left[\left(\det \mathbf{F}^0 \right)^2 \left(2 F_{jl}^{0T-1} F_{ik}^{0T-1} - F_{il}^{0T-1} F_{jk}^{0T-1} \right) \right. \\ & \left. - \det \mathbf{F}^0 \left(F_{jl}^{0T-1} F_{ik}^{0T-1} - F_{il}^{0T-1} F_{jk}^{0T-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.28)$$

gegeben ist. In Gleichung (7.27) treten die Variationen δu_i^1 , $\delta \alpha_i$, $\delta \beta_i^\kappa$ und δu_i^κ auf. Da diese vier Variationen voneinander unabhängig sind, müssen die dazugehörigen Anteile auch einzeln betrachtet gleich Null sein. Deswegen dürfen wir Oberflächen- und Volumenintegrale voneinander trennen. Es entstehen damit die beiden Gleichungen

$$0 = \left\{ \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} -P_{ij}^0 \frac{\partial \delta u_i^1}{\partial Y_j} - \frac{\partial \delta u_i^1}{\partial Y_k} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} \frac{\partial \Delta u_j^1}{\partial Y_l} dY + (\alpha_i + \Delta \alpha_i) \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} \delta u_i^1 dY \right. \\ \left. + \delta \alpha_i \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} (u_i^1 + \Delta u_i^1) dY \right\}^{(j)} \quad \text{und} \quad (7.29)$$

$$0 = \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ \int_{\partial \mathcal{V}_{\mathcal{R}}^\kappa} \delta \beta_i^\kappa (u_i^{1+} + \Delta u_i^{1+} - u_i^{1-} - \Delta u_i^{1-}) dY + \int_{\partial \mathcal{V}_{\mathcal{R}}^\kappa} (\beta_i^\kappa + \Delta \beta_i^\kappa) (\delta u_i^{1+} - \delta u_i^{1-}) dY \right\}^{(j)}. \quad (7.30)$$

In Gleichung (7.29) diskretisieren wir die Größen u_i^1 , Δu_i^1 und δu_i^1 gemäß dem isoparametrischen Prinzip. Die rein globalen Variablen α_i , $\Delta \alpha_i$ und $\delta \alpha_i$ erfordern keine Approximation durch Finite Elemente. Für jedes mikroskopische Volumenelement $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}^e$ erhalten wir damit die Diskretisierung

$$0 = \left\{ \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}^e} -P_{ij}^0 \frac{\partial N^A}{\partial Y_j} \delta u_i^{1A} - \delta u_i^{1A} \frac{\partial N^A}{\partial Y_k} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} \frac{\partial N^B}{\partial Y_l} \Delta u_j^{1B} dY + (\alpha_i + \Delta \alpha_i) \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}^e} \delta u_i^{1A} N^A dY \right. \\ \left. + \delta \alpha_i \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{R}}^e} (u_i^{1A} + \Delta u_i^{1A}) N^A dY \right\}^{(j)}. \quad (7.31)$$

In Gleichung (7.30) werden die Größen u_i^1 , Δu_i^1 , δu_i^{1+} , δu_i^{1-} , β_i^κ , $\Delta \beta_i^\kappa$ und $\delta \beta_i^\kappa$ isoparametrisch diskretisiert, wobei wir in diesem Fall zur Berechnung der Integrale über Oberflächenelemente summieren müssen. Die Formfunktionen solcher Oberflächenelemente bezeichnen wir für jeden Teilrand $\partial \mathcal{V}_{\mathcal{R}}^\kappa$ der Einfachheit halber nur mit M . Für jedes mikroskopische Oberflächenelement $\partial \mathcal{V}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}$ erhalten wir damit die Diskretisierung

$$0 = \left\{ \int_{\partial \mathcal{V}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} \delta \beta_i^{\kappa C} M^C (u_i^{1+D} + \Delta u_i^{1+D} - u_i^{1-D} - \Delta u_i^{1-D}) M^D dY \right.$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} \left(\beta_i^{\kappa C} + \Delta \beta_i^{\kappa C} \right) M^C \left(\delta u_i^{1+D} - \delta u_i^{1-D} \right) M^D dY \Bigg\}^{(j)} . \quad (7.32)$$

Für eine bessere Lesbarkeit definieren wir die konstanten Vektoren

$$\begin{aligned} \bar{u}_{3(A-1)+i}^1 &:= u_i^{1A}, & \bar{\delta u}_{3(A-1)+i}^1 &:= \delta u_i^{1A}, \\ \bar{u}_{3(C-1)+i}^{1+} &:= u_i^{1+C}, & \bar{u}_{3(C-1)+i}^{1-} &:= u_i^{1-C}, \\ \bar{\delta u}_{3(C-1)+i}^{1+} &:= \delta u_i^{1+C}, & \bar{\delta u}_{3(C-1)+i}^{1-} &:= \delta u_i^{1-C}, \\ \bar{\beta}_{3(C-1)+i}^{\kappa} &:= \beta_i^{\kappa C}, & \bar{\delta \beta}_{3(C-1)+i}^{\kappa} &:= \delta \beta_i^{\kappa C}, \\ \bar{\alpha}_i &:= \alpha_i, & \bar{\delta \alpha}_i &:= \delta \alpha_i. \end{aligned}$$

Mit der allgemein gültigen Beziehung $x_i^{(j+1)} = x_i^{(j)} + \Delta x_i^{(j)}$ folgen aus (7.31) und (7.32) die nach Variationstypen sortierten Beziehungen

$$\begin{aligned} 0 = \bar{\delta u}_{3(A-1)+i}^1 & \left[\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} - \left(\frac{\partial N^A}{\partial Y_k} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} \frac{\partial N^B}{\partial Y_l} dY \right)^{(j)} \bar{u}_{3(B-1)+j}^{1(j+1)} + \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \delta_{ij} N^A dY \right)^{(j)} \bar{\alpha}_j^{(j+1)} \right. \\ & \left. - \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} P_{ij}^0 \frac{\partial N^A}{\partial Y_j} dY \right)^{(j)} + \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial Y_k} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} \frac{\partial N^B}{\partial Y_l} dY \bar{u}_{3(B-1)+j}^1 \right)^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$0 = \bar{\delta \alpha}_i \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \delta_{ij} N^A dY \right)^{(j)} \bar{u}_{3(A-1)+j}^{1(j+1)}, \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} 0 = \bar{\delta \beta}_{3(C-1)+i}^{\kappa} & \left[\left(\int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C \delta_{ij} M^D dY \right)^{(j)} \left(\bar{u}_{3(D-1)+j}^{1+(j+1)} - \bar{u}_{3(D-1)+j}^{1-(j+1)} \right) \right] \\ & \text{für jedes } \kappa = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$0 = \bar{\delta u}_{3(D-1)+i}^{1+} \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C \delta_{ij} M^D dY \right)^{(j)} \bar{\beta}_{3(C-1)+j}^{\kappa(j+1)} \quad \text{für jedes } \kappa = 1, 2, 3 \text{ und} \quad (7.36)$$

$$0 = \bar{\delta u}_{3(D-1)+i}^{1-} \left(- \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C \delta_{ij} M^D dY \right)^{(j)} \bar{\beta}_{3(C-1)+j}^{\kappa(j+1)} \quad \text{für jedes } \kappa = 1, 2, 3. \quad (7.37)$$

Beim Aufstellen des linearen Gesamtgleichungssystems bilden die aus (7.36) und (7.37) resultierenden Zeilen zusätzliche Spalteneinträge in genau denjenigen Zeilen von (7.33), für die die Komponenten der Variationen $\overline{\delta \mathbf{u}}^1$ mit denen der Randvariationen $\overline{\delta \mathbf{u}}^{1+}$ und $\overline{\delta \mathbf{u}}^{1-}$ übereinstimmen. Wir definieren

$$\mathbb{K}_{(1,1)} \hat{=} k_{3(A-1)+i,3(B-1)+j}^{(1,1)} := - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial Y_k} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} \frac{\partial N^B}{\partial Y_l} dY, \quad (7.38)$$

$$\mathbb{K}_{(1,2)} \hat{=} k_{3(A-1)+i,j}^{(1,2)} := \delta_{ij} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} N^A dY, \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(1,\kappa+2)} &\hat{=} k_{3(A-1)+i,3(C-1)+j}^{(1,\kappa+2)} \\ &:= \begin{cases} \delta_{ij} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{\delta u}^{1+}_{3(D-1)+i} \text{ und } \overline{\delta u}^1_{3(A-1)+i}, \\ -\delta_{ij} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{\delta u}^{1-}_{3(D-1)+i} \text{ und } \overline{\delta u}^1_{3(A-1)+i} \\ 0 & \text{auf denselben Knoten beziehen,} \\ & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.40)$$

für jedes $\kappa = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{K}_{(2,1)} \hat{=} k_{i,3(A-1)+j}^{(2,1)} := \delta_{ij} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} N^A dY, \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(\kappa+2,1)} &\hat{=} k_{3(C-1)+i,3(B-1)+j}^{(\kappa+2,1)} \\ &:= \begin{cases} \delta_{ij} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{u}^{1+}_{3(D-1)+j} \text{ und } \overline{u}^1_{3(B-1)+j}, \\ -\delta_{ij} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{u}^{1-}_{3(D-1)+j} \text{ und } \overline{u}^1_{3(B-1)+j} \\ 0 & \text{auf denselben Knoten beziehen,} \\ & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.42)$$

für jedes $\kappa = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{F}_{(1)} \hat{=} f_{3(A-1)+i}^{(1)} := \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} -P_{ij}^0 \frac{\partial N^A}{\partial Y_j} dY + \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial Y_k} \frac{\partial P_{ik}^0}{\partial F_{jl}^0} \frac{\partial N^B}{\partial Y_l} dY \overline{u}_{3(B-1)+j}^1, \quad (7.43)$$

$$\mathbb{X}_{(1)} \hat{=} x_{3(B-1)+j}^{(1)} := \overline{u}_{3(B-1)+j}^1, \quad (7.44)$$

$$\mathbb{X}_{(2)} \hat{=} x_j^{(2)} := \overline{\alpha}_j \quad \text{und} \quad (7.45)$$

$$\mathbb{X}_{(\kappa+2)} \hat{=} x_{3(C-1)+j}^{(\kappa+3)} := \overline{\beta}^{\kappa}_{3(C-1)+j} \quad \text{für jedes } \kappa = 1, 2, 3. \quad (7.46)$$

Wenn wir die Knotenindizes A , B , C und D auf die globale Indizierung des gesamten Netzes beziehen, so läßt sich das gesamte Gleichungssystem wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{(1,1)} & \mathbb{K}_{(1,2)} & \mathbb{K}_{(1,3)} & \mathbb{K}_{(1,4)} & \mathbb{K}_{(1,5)} \\ \mathbb{K}_{(2,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_{(3,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_{(4,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_{(5,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(j)} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{(1)} \\ \mathbb{X}_{(2)} \\ \mathbb{X}_{(3)} \\ \mathbb{X}_{(4)} \\ \mathbb{X}_{(5)} \end{bmatrix}^{(j+1)} = - \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{(j)}. \quad (7.47)$$

Wir erkennen, daß die Beziehungen $\mathbb{K}_{(1,2)} = \mathbb{K}_{(2,1)}^T$, $\mathbb{K}_{(1,3)} = \mathbb{K}_{(3,1)}^T$, $\mathbb{K}_{(1,4)} = \mathbb{K}_{(4,1)}^T$ und $\mathbb{K}_{(1,5)} = \mathbb{K}_{(5,1)}^T$ erfüllt sind. Dadurch besitzt das Gleichungssystem (7.47) die sogenannte *Sattelpunktstruktur* [13, Kap. III, §4]. Wie bereits oben angedeutet, sind Probleme mit Sattelpunktstruktur nicht mit Standardalgorithmen lösbar und können zusätzlich mehrere Lösungen besitzen.

In manchen Fällen umgehen Verfahren wie die sogenannte *Schurkomplement-Reduktion* [10, Kap. 5] zumindest das erste Problem. Bei dieser Methode werden die beiden Variablen $\mathbb{X}_{(1)}$ und $\mathbb{X}_{(2)}^* := [\mathbb{X}_{(2)} \ \mathbb{X}_{(3)} \ \mathbb{X}_{(4)} \ \mathbb{X}_{(5)}]^T$ voneinander separiert, wodurch eine Zerlegung des Gesamtproblems in zwei klassisch lösbare Teilprobleme erzielt wird. Für invertierbare $\mathbb{K}_{(1,1)}$ folgen mit $\mathbb{K}_{(1,2)}^* := [\mathbb{K}_{(1,2)} \ \mathbb{K}_{(1,3)} \ \mathbb{K}_{(1,4)} \ \mathbb{K}_{(1,5)}]$ und $\mathbb{K}_{(2,1)}^* := \mathbb{K}_{(1,2)}^{*T}$ die beiden Gleichungen

$$\mathbb{K}_{(2,1)}^* \cdot \mathbb{K}_{(1,1)}^{-1} \cdot \mathbb{K}_{(1,2)}^* \cdot \mathbb{X}_{(2)}^* = -\mathbb{K}_{(2,1)}^* \cdot \mathbb{K}_{(1,1)}^{-1} \cdot \mathbb{F}_{(1)}, \quad (7.48a)$$

$$\mathbb{K}_{(1,1)} \cdot \mathbb{X}_{(1)} = -\mathbb{F}_{(1)} - \mathbb{K}_{(1,2)}^* \cdot \mathbb{X}_{(2)}^{**}, \quad (7.48b)$$

wobei $\mathbb{X}_{(2)}^{**}$ die Lösung von Gleichung (7.48a) darstellt. Diese Methode wurde mit Elmer getestet, führte jedoch auf kein konvergentes Verfahren.

Anwendung des gestörten Lagrange-Verfahrens

Mit dem soeben hergeleiteten klassischen Lagrange-Verfahren konnten keine konvergenten Testrechnungen durchgeführt werden, was auf die angesprochene Mehrdeutigkeit der Lösung hindeutet. In [17], [67] und [87] wird für die Erzielung von inkompressiblem hyperelastischem Materialverhalten das sogenannte *gestörte Lagrange-Verfahren* [11] vorgeschlagen. Wir wenden diese Methode auf das vorliegende Problem an und ziehen deshalb den Ausdruck

$$\frac{1}{2\tau} \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sum_{\kappa=1}^3 \boldsymbol{\beta}^{\kappa} \cdot \boldsymbol{\beta}^{\kappa} \right) \quad (7.49)$$

für $\tau > 0$ von der Lagrange-Funktion $\hat{\Pi}(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{\kappa})$ ab. Dadurch transformiert sich das System (7.47) gemäß [87, Kap. 10.2] zu

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{(1,1)} & \mathbb{K}_{(1,2)} & \mathbb{K}_{(1,3)} & \mathbb{K}_{(1,4)} & \mathbb{K}_{(1,5)} \\ \mathbb{K}_{(2,1)} & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{K}_{(3,1)} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{K}_{(4,1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbb{K}_{(5,1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} \end{bmatrix}^{(j)} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{(1)} \\ \mathbb{X}_{(2)} \\ \mathbb{X}_{(3)} \\ \mathbb{X}_{(4)} \\ \mathbb{X}_{(5)} \end{bmatrix}^{(j+1)} = - \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(j)}, \quad (7.50)$$

wobei $\mathbf{1}$ jeweils die Einheitsmatrix mit passender Dimension darstellt. Der sogenannte *Störterm* (7.49) bewirkt, daß das resultierende System (7.50) mit allgemeinen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme eindeutig lösbar ist. Diesen Vorteil erkaufte man sich mit der Verletzung der auferlegten Nebenbedingungen: Der Störterm schwächt diese in Abhängigkeit von τ ab. Je größer wir τ wählen, desto kleiner wird der Einfluß des Störterms. Auf der einen Seite bedeutet dies, daß die Nebenbedingungen für große τ nicht so stark verletzt werden wie für eine kleinere Wahl dieses Parameters. Auf der anderen Seite aber kann sich die Kondition des aufgestellten Gleichungssystems in diesem Fall enorm verschlechtern. Eine ausgewogene Wahl des Parameters τ , welche zu einer möglichst exakten Erfüllung der Nebenbedingungen bei möglichst guter Kondition führt, ist problemabhängig und bedarf normalerweise der Erfahrung des Anwenders.

7.4 Validierung des mikroskopischen Problems anhand homogener Materialien

In diesem Abschnitt simulieren wir den Belastungsfall der einfachen Scherung für rein homogene Materialien, wobei uns ein einziger makroskopischer Punkt als Referenz dient. Zuerst widmen wir uns der Suche nach einem geeigneten Störparameter für das gestörte Lagrange-Verfahren. Ist ein solcher ermittelt, vergleichen wir die Ergebnisse für eine vollständig homogene mikroskopische Einheitszelle mit den Referenzwerten des makroskopischen Punktes. Die beiden im Spannungsgesetz verwendeten Materialparameter λ und μ definieren wir in Anlehnung an die lineare Theorie als

$$\lambda := \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu := \frac{E}{2+2\nu}, \quad (7.51)$$

wobei E für das Elastizitätsmodul und ν für die Querkontraktionszahl stehen soll. Diese beiden Beziehungen sollen auch für alle nachfolgenden Kapitel gelten. In diesem Abschnitt verwenden wir die Werte $E = 210.000$ Megapascal [MPa] und $\nu = 0,3$. Dies entspricht dem elastischen Materialverhalten eines ferritischen Stahls. Die Konvergenz des Verfahrens messen wir mithilfe der relativen Änderung des Lösungsvektors in Bezug zu seinem vorigen Iterationswert in der L^2 -Norm durch Vergleich mit der Toleranzschwelle 10^{-14} . Die mikroskopische Einheitszelle stellen wir mit einem Würfel der Kantenlänge 1 dar, welcher in Abhängigkeit von der aktuellen Rechnung unterschiedlich fein unterteilt sein wird.

Einfache Scherung

Die einfache Scherung führen wir in der X_2 - X_3 -Ebene in positiver X_2 -Richtung durch. Damit ist der makroskopische Deformationsgradient in jedem makroskopischen Punkt \mathbf{X} durch

$$\mathbf{F}^M(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

gegeben, wobei γ aus dem in Abbildung 7.3 skizzierten Scherwinkel θ gemäß $\gamma = \tan \theta$ berechnet wird und als ein Maß für den Fortschritt der Deformation dient. Da wir den Defor-

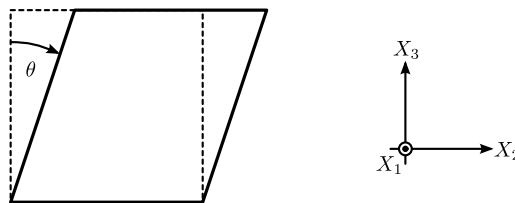


Abbildung 7.3: Einfache Scherung

mationsgradienten \mathbf{F}^M für jeden Scherwinkel θ und damit zu jedem Deformationszeitpunkt bereits kennen, können wir die makroskopischen Referenzwerte durch direktes Anwenden der Spannungs-Dehnungs-Beziehung bestimmen. Eine Approximation durch Finite Elemente ist an dieser Stelle nicht notwendig.

Wahl eines geeigneten Störparameters τ

Wir betrachten den festen Deformationszeitpunkt $\gamma = 0,1$ und möchten die Komponenten des Cauchy'schen Spannungstensors sowie die Determinante des Deformationsgradienten für verschiedene Parameter τ vergleichen. Dazu führen wir neben den Rechnungen am makroskopischen Punkt auch solche auf einem mikroskopischen quadratischen $5 \times 5 \times 5$ - und einem mikroskopischen quadratischen $10 \times 10 \times 10$ -Gitter mit jeweils einem Quasizeitschritt durch. Die Referenzergebnisse für den makroskopischen Punkt stehen in Tabelle 7.1.

Referenzgröße	Wert
σ_{11} [MPa]	0,0000e+00
σ_{12} [MPa]	0,0000e+00
σ_{13} [MPa]	0,0000e+00
σ_{22} [MPa]	0,8077e+03
σ_{23} [MPa]	0,8077e+04
σ_{33} [MPa]	0,0000e+00
$\det \mathbf{F}$ [-]	0,1000e+01

Tabelle 7.1: Ergebnisse des makroskopischen Referenzpunktes

Für das mikroskopische Netz der Größe $5 \times 5 \times 5$ stehen die über $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ gemittelten Größen für verschiedene Störparameter τ in Tabelle 7.2. Wir erkennen, daß für kleine Werte von τ teils

Gemittelte Größe	Wert für den Störparameter τ					
	10^7	10^9	10^{11}	10^{13}	10^{15}	10^{17}
σ_{11}^M [MPa]	0,2928e+04	-0,4088e+01	-0,3488e-01	-0,3485e-03	-0,3485e-05	∞
σ_{12}^M [MPa]	-0,4404e-11	0,1696e-12	-0,2052e-12	-0,3697e-12	0,2925e-13	∞
σ_{13}^M [MPa]	0,1234e-12	-0,2097e-12	-0,7569e-12	0,6788e-12	-0,2292e-12	∞
σ_{22}^M [MPa]	0,4141e+04	0,8085e+03	0,8077e+03	0,8077e+03	0,8077e+03	∞
σ_{23}^M [MPa]	0,1544e+05	0,8126e+04	0,8077e+04	0,8077e+04	0,8077e+04	∞
σ_{33}^M [MPa]	0,2428e+04	-0,4275e+01	-0,3489e-01	-0,3485e-03	-0,3485e-05	∞
$\det \mathbf{F}^M$ [-]	0,1012e+01	0,1000e+01	0,1000e+01	0,1000e+01	0,1000e+01	∞

Tabelle 7.2: Ergebnisse am quadratischen mikroskopischen Netz der Größe $5 \times 5 \times 5$

sehr große Abweichungen in den Spannungskomponenten auftreten. Dieses Verhalten können wir vor allem für diejenigen Normalenspannungen beobachten, welche im Referenzfall exakt Null sind. Siehe zum Beispiel die Komponente σ_{11}^M für den Parameter $\tau = 10^7$. Mit der schrittweisen Erhöhung von τ verbessern sich sukzessive die berechneten Werte. Schon ab $\tau = 10^{11}$ stimmen die für die durchgeführte Scherung wichtigen Komponenten σ_{22}^M und σ_{23}^M mit den Referenzwerten im Rahmen der gezeigten Genauigkeit überein. Allerdings weichen die beiden Normalenkomponenten σ_{11}^M und σ_{33}^M immernoch stark von den Zielwerten ab. Für den Parame-

ter $\tau = 10^{15}$ ist die Abweichung in den Normalenkomponenten bereits hinreichend klein, eine weitere Erhöhung des Parameters auf 10^{17} lässt das numerische Verfahren für das betrachtete Problem divergieren. Die Ergebnisse für das mikroskopische Netz der Größe $10 \times 10 \times 10$ stehen in Tabelle 7.3. Es lässt sich dasselbe Verhalten wie bei den Ergebnissen des kleineren Netzes be-

Gemittelte Größe	Wert für den Störparameter τ			
	10^{11}	10^{13}	10^{15}	10^{17}
σ_{11}^M [MPa]	-0,1185e+00	-0,1181e-02	-0,1181e-04	∞
σ_{12}^M [MPa]	-0,5224e-11	0,3204e-12	0,1130e-11	∞
σ_{13}^M [MPa]	0,6091e-11	0,5276e-13	-0,2306e-11	∞
σ_{22}^M [MPa]	0,8077e+03	0,8077e+03	0,8077e+03	∞
σ_{23}^M [MPa]	0,8079e+04	0,8077e+04	0,8077e+04	∞
σ_{33}^M [MPa]	-0,1186e+00	-0,1181e-02	-0,1181e-04	∞
$\det \mathbf{F}^M$ [-]	0,1000e+01	0,1000e+01	0,1000e+01	∞

Tabelle 7.3: Ergebnisse am quadratischen mikroskopischen Netz der Größe $10 \times 10 \times 10$

obachten. Auch hier sind die Werte für die Wahl $\tau = 10^{15}$ hinreichend genau und eine Erhöhung von τ auf 10^{17} würde die Konvergenz des Verfahrens zerstören. Mit diesem Hintergrundwissen verwenden wir 10^{15} auch für andere Rechnungen als Ausgangswert für den Störparameter τ .

Vergleichsrechnung für einfache Scherung

Nachdem wir 10^{15} als eine geeignete Wahl für den Störparameter des gestörten Lagrange-Verfahrens bestimmt haben, simulieren wir den Verlauf einer einfachen Scherung im Deformationsbereich $\gamma = 0$ bis $\gamma = 0,5$ mit 20 Quasizeitschritten. Wir vergleichen die Ergebnisse des makroskopischen Referenzpunktes mit den Werten einer mikroskopischen Rechnung am quadratischen $5 \times 5 \times 5$ -Gitter. Die Ergebnisse sind in den beiden Abbildungen 7.4 und 7.5 dargestellt.

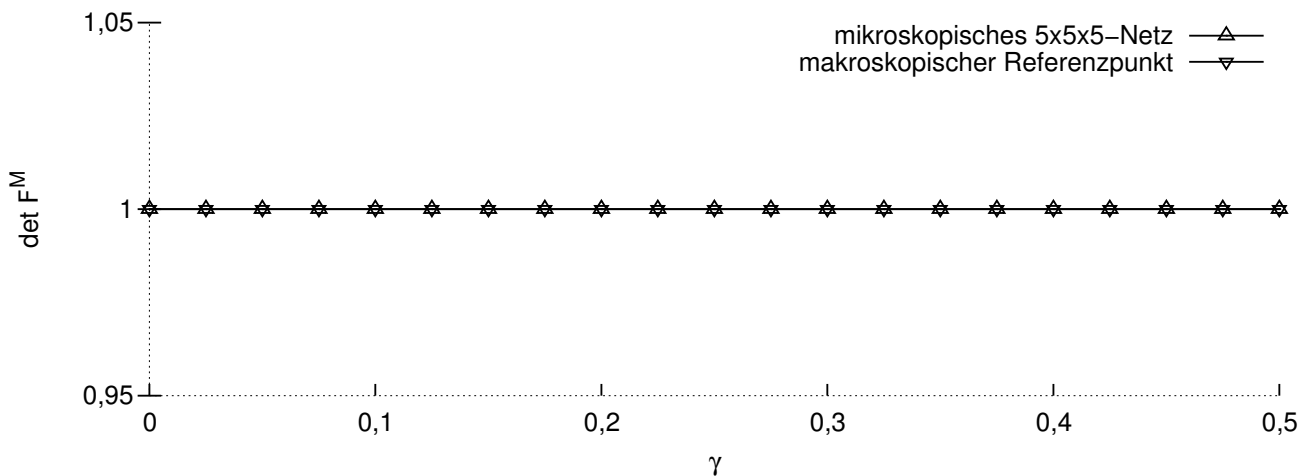


Abbildung 7.4: Verlauf von $\det \mathbf{F}^M$

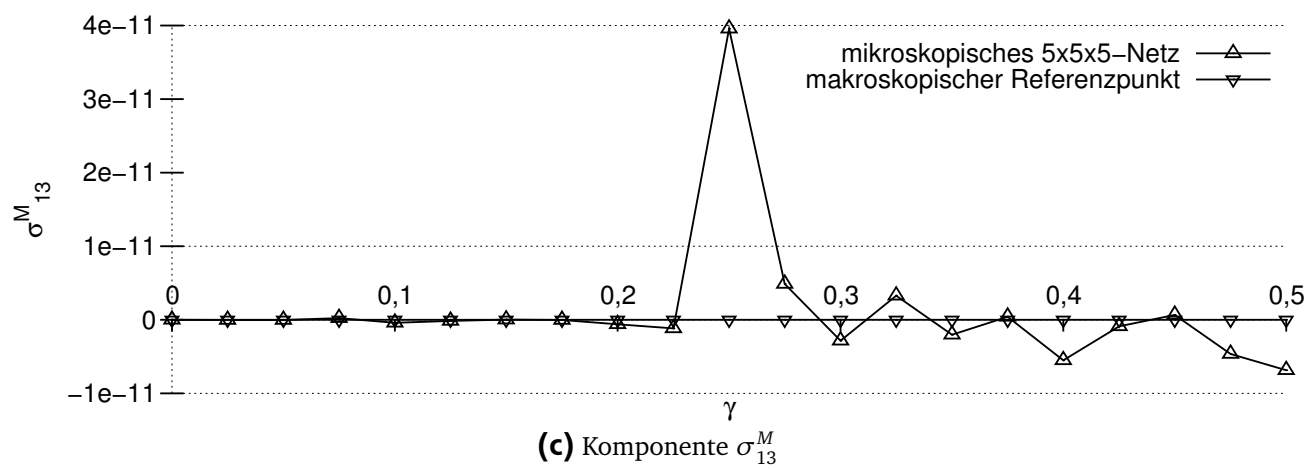
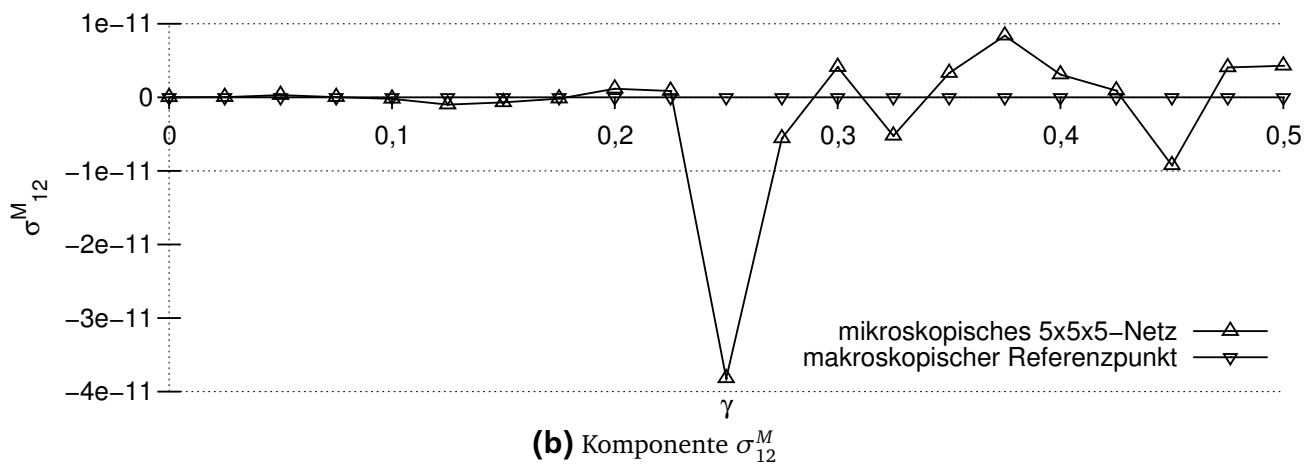
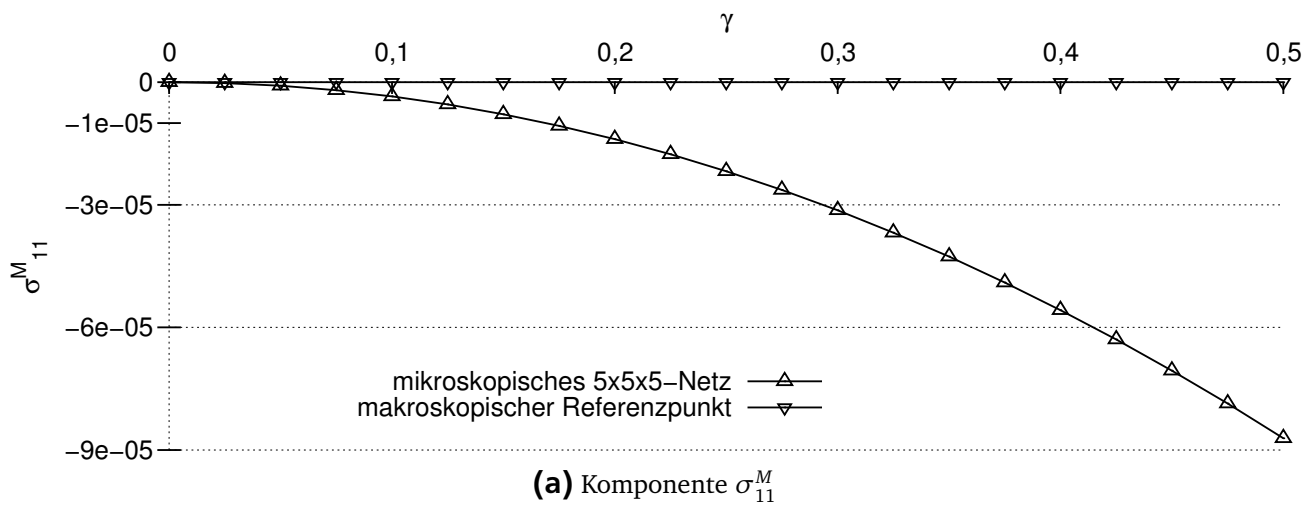


Abbildung 7.5: Spannungsverläufe

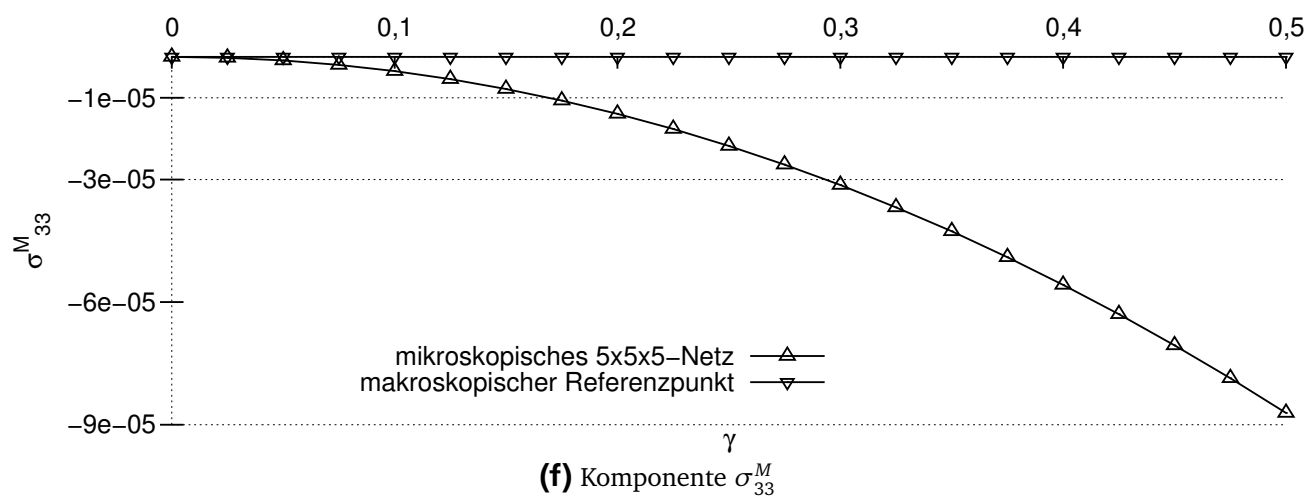
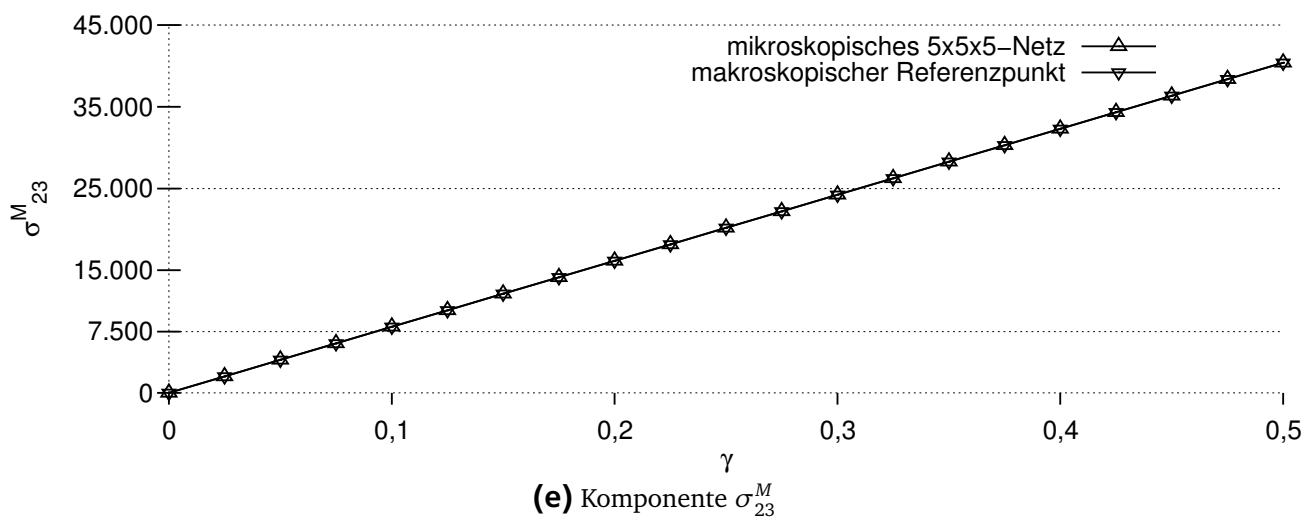
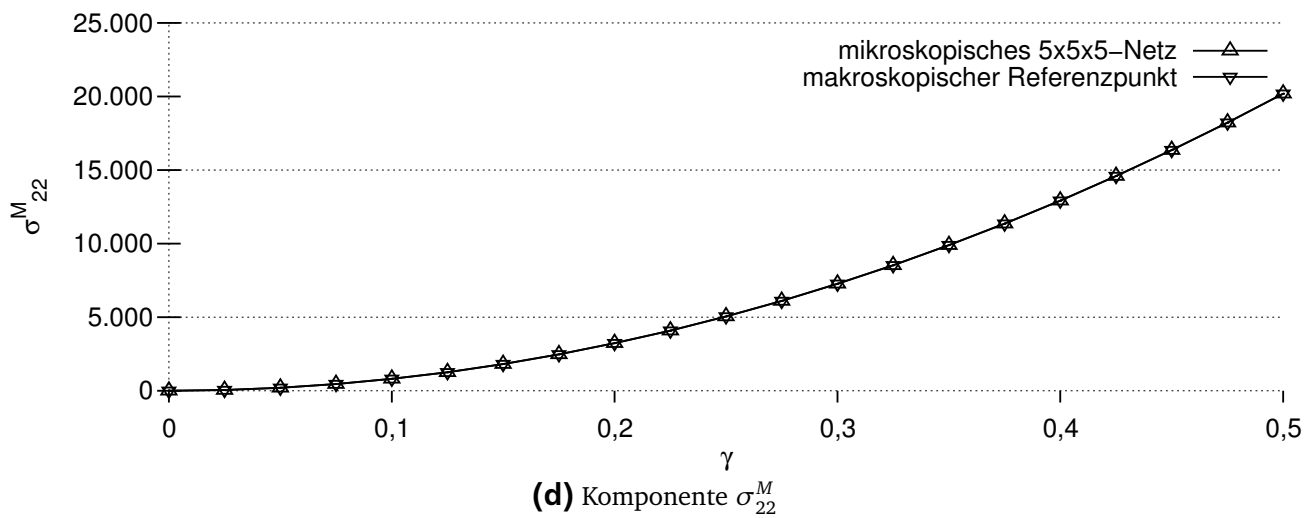


Abbildung 7.5: Spannungsverläufe

Wie den Verläufen zu entnehmen ist, stimmen die Werte von $\det \mathbf{F}^M$, σ_{12}^M , σ_{13}^M , σ_{22}^M und σ_{23}^M während der gesamten Deformation mit denjenigen der Referenzrechnung überein. Abweichungen liegen hier in der Größenordnung von 10^{-11} vor. Etwas größer sind die Unterschiede bei den beiden Normalenspannungen σ_{11}^M und σ_{33}^M . Während der Deformation vergrößern sich diese Abweichungen kontinuierlich. Wie bereits erwähnt, kann dies an einer Verschlechterung der Kondition des aufgestellten linearen Gleichungssystems liegen, da wir τ relativ groß gewählt haben. Zum Zeitpunkt $\gamma = 0,5$ liegt der beobachtete Fehler in einer Größenordnung von 10^{-5} . Wir können davon ausgehen, daß diese Abweichungen bei noch größerer Belastung weiter ansteigen werden.

Die Untersuchung des Störparameters τ hat gezeigt, daß die beiden Komponenten σ_{11}^M und σ_{33}^M am empfindlichsten gegenüber seiner Wahl sind. Dies wirft die Frage auf, ob das Vergrößern von τ bei weiter vorangeschrittener Deformation genauere Ergebnisse liefern kann ohne dabei die Konvergenz des numerischen Verfahrens zu zerstören. Testrechnungen für $\tau = 10^{17}$ haben zu keinem späteren Deformationszeitpunkt zu einer konvergenten Lösung geführt, weswegen wir an dieser Stelle die mit der Deformation zunehmenden Abweichungen der Normalenspannungen σ_{11}^M und σ_{33}^M hinnehmen müssen.

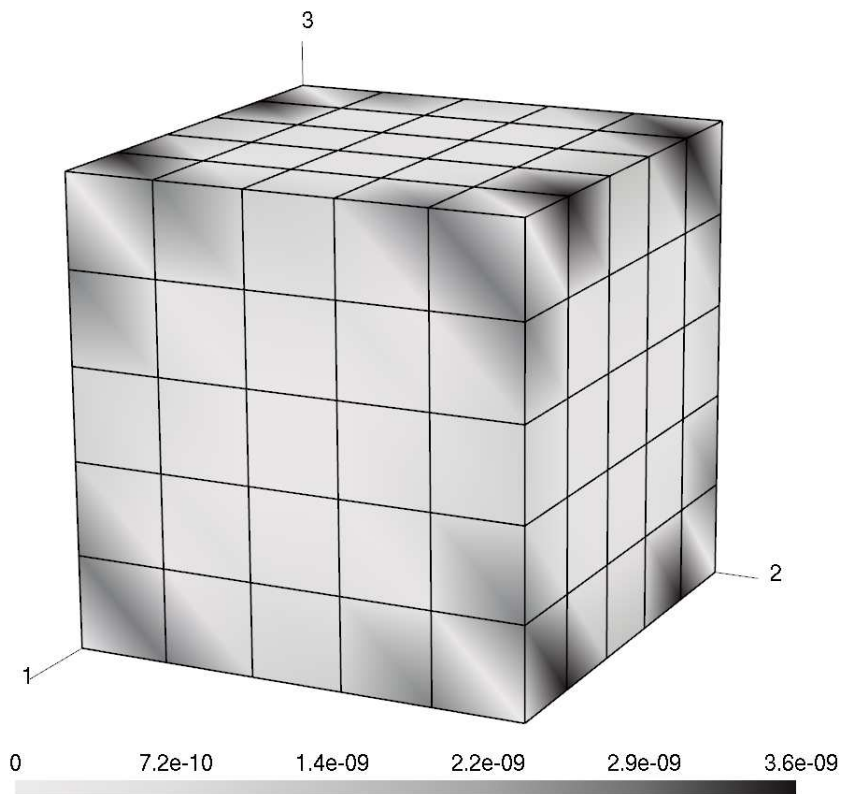


Abbildung 7.6: Mikroskopische Fluktuation $\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ für $\gamma = 0,5$

Abbildung 7.6 zeigt die mikroskopische Fluktuation $\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ zum Deformationszeitpunkt $\gamma = 0,5$. Wir erkennen, daß die Lösung des mikroskopischen Problems quasi bei Null liegt. In Abbildung 7.7 ist dieses Ergebnis mit der makroskopischen Deformation $\mathbf{F}^M(\mathbf{X})$ überlagert, wodurch die gesamte mikroskopische Bewegung $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ dargestellt wird.

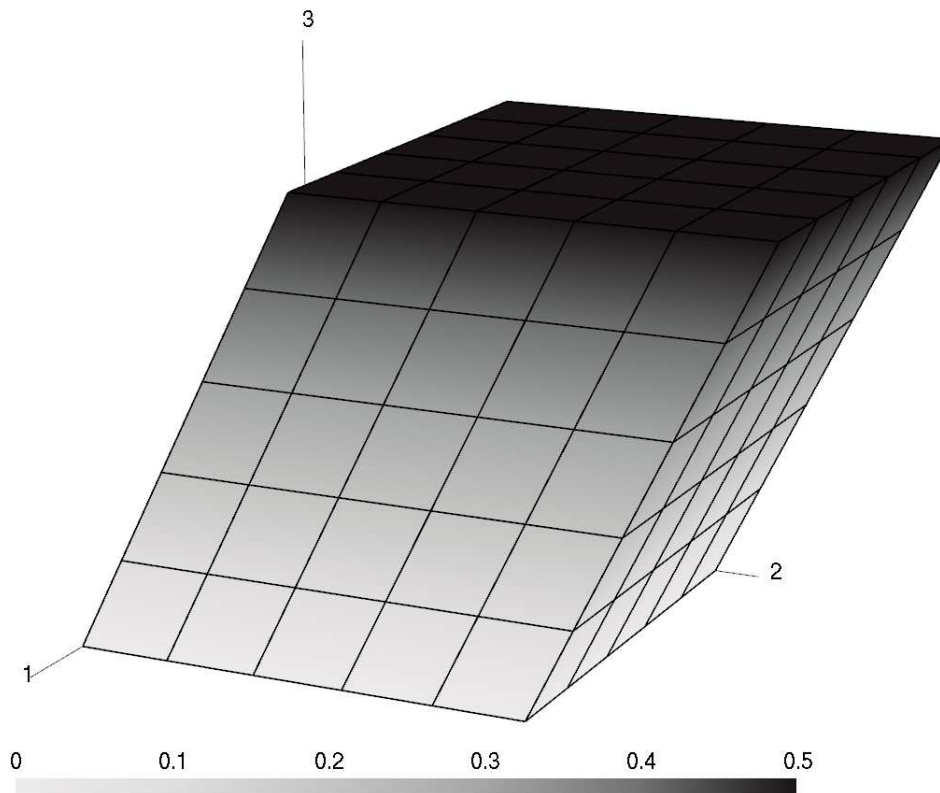


Abbildung 7.7: Gesamte mikroskopische Bewegung $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ für $\gamma = 0,5$

Fazit: Bei der einfachen Scherung für homogene Materialien liefert die mathematische Homogenisierung für eine Deformation bis $\gamma = 0,5$ mit dem Störparameter $\tau = 10^{15}$ maximal Fehler der Größenordnung 10^{-5} . Die numerischen Rechnungen basieren auf der räumlichen Diskretisierung der Einheitszelle mit einem quadratischen $5 \times 5 \times 5$ -Netz. Zusätzlich hat sich gezeigt, daß die mikroskopische Fluktuation $\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ für feste \mathbf{X} überall in $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ ungefähr gleich Null ist. Damit überträgt sich das Deformationsverhalten der einfachen Scherung für homogene Materialien (fast) nahtlos auf das mikroskopische Volumen. Dieses Verhalten ist physikalisch sinnvoll und spricht für das vorgeschlagene numerische Schema des mikroskopischen Problems.

7.5 Finite-Elemente-Formulierung des makroskopischen Problems

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Finite-Elemente-Formulierung des makroskopischen Problems (5.84) - (5.88). Entscheidend bei diesem Prozeß ist die konsistente Formulierung des makroskopischen Tangententensors $\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M}$, da dieser nicht analytisch bestimmt werden kann.

Linearisierung und Diskretisierung der makroskopischen schwachen Impulsbilanz

Analog zur einskaligen Vorgehensweise in Abschnitt 7.1 ergibt sich für die makroskopische Impulsbilanz (5.84) elementweise die Iterationsvorschrift

$$\mathbb{K}_{3(A-1)+i,3(B-1)+j}^{M(i)} \bar{u}_{3(B-1)+j}^{0(i+1)} = \mathbb{K}_{3(A-1)+i,3(B-1)+j}^{M(i)} \bar{u}_{3(B-1)+j}^{0(i)} - \mathbb{F}_{3(A-1)+i}^{M(i)}, \quad (7.53)$$

wobei in diesem Fall mit $F_{ij}^M = H_{ij}^M + \delta_{ij}$ die Definitionen

$$\mathbb{K}_{3(A-1)+i,3(B-1)+j}^{M(i)} := \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial X_k} \left(\frac{\partial P_{ik}^M}{\partial F_{jl}^M} \right)^{(i)} \frac{\partial N^B}{\partial X_l} d\mathbf{X} \quad \text{und} \quad (7.54)$$

$$\mathbb{F}_{3(A-1)+i}^{M(i)} := \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}^e} P_{ij}^{M(i)} \frac{\partial N^A}{\partial X_j} d\mathbf{X} \quad (7.55)$$

gelten sollen. Die Volumenmittelwerte P_{ij}^M und H_{ij}^M sind in (5.89) und (5.90) definiert und lassen sich punktweise mithilfe des mikroskopischen Problems bestimmen. In diesem Sinn ersetzen die Rechnungen an der mikroskopischen Einheitszelle für jedes makroskopische \mathbf{X} ein konstitutives makroskopisches Materialgesetz, weswegen die exakte analytische Bestimmung der Ableitung von P_{ik}^M nach dem Deformationsgradienten F_{jl}^M nicht mehr möglich ist.

Mögliche Formulierungen für den Tangententensor $\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M}$

Der naheliegendste Ansatz zur Ermittlung des makroskopischen Tangententensors $\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M}(\mathbf{X})$ ist für jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ durch den über $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ gemittelten Tensor

$$\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M} := \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} \right\rangle_{\mathcal{Y}} \quad (7.56)$$

gegeben. Der große Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der Einfachheit des Verfahrens und dem geringen zusätzlichen Rechenaufwand. Andererseits muß jedoch mit einer Verschlechterung der makroskopischen Konvergenz gerechnet werden, welche auf der Inkonsistenz dieses Ansatzes beruht [79]. Bereits in [9] wird diesbezüglich ein eindimensionales Problem diskutiert, bei welchem die makroskopische Tangente nicht mit der gemittelten mikroskopischen

übereinstimmt. Trotzdem werden wir zwecks Vergleichbarkeit Rechnungen mit diesem einfachen Verfahren durchführen.

In [56] wird als weitere Möglichkeit die vollständig numerische Auswertung des makroskopischen Tangententensors mithilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens vorgeschlagen. Da das mikroskopische Problem bei jeder der neun notwendigen Störungen von \mathbf{F}^M erneut ausgewertet werden muß, setzt diese Methode enorme Rechenkapazitäten voraus. Trotzdem werden wir an späterer Stelle diese Variante testen. Wir richten uns dabei für alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$ nach der in [71] vorgeschlagenen Vorwärtsapproximation

$$\frac{\partial P_{ik}^M}{\partial F_{jl}^M} \approx \frac{P_{ik}^M(\mathbf{F}^M + \Delta h_{jl} \mathbf{E}^{jl}) - P_{ik}^M(\mathbf{F}^M)}{\Delta h_{jl}}, \quad (7.57)$$

wobei $\{\mathbf{E}^{jl}\}$ die kanonische Einheitsbasis des Tensorraums zweiter Stufe darstellen soll und wir den Störungsterm Δh_{jl} gemäß $\Delta h_{jl} = 10^{-5} \cdot \left| F_{jl}^M \right| + 10^{-5}$ berechnen. Im Ausdruck $\Delta h_{jl} \mathbf{E}^{jl}$ wird dabei nicht über doppelt auftretende Indizes summiert.

Ein weiterer Lösungsansatz des Problems wird in [45] beschrieben. Dort wird in einem ersten Schritt der mikroskopische Tangententensor auf diejenigen Einträge reduziert, welche mit den Randpunkten des Mikrovolumens korrespondieren. In einem zweiten Schritt wird die kondensierte Mikrotangente mithilfe von Variationsargumenten zum makroskopischen Tangententensor für den betrachteten Punkt \mathbf{X} zusammengefaßt. Diesen Ansatz verfolgen wir nicht weiter.

In [81] wird eine Approximation der makroskopischen Tangente vorgeschlagen, welche auf einer Zerlegung der mikroskopischen Fluktuation $\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ beruht. Dieser Vorschlag hängt eng mit den Ergebnissen der asymptotischen mathematischen Homogenisierung für lineare Elastizität zusammen, welche wir in Kapitel 4.1 kennengelernt haben. Aus diesem Grund möchten wir diesen Ansatz genauer betrachten: Für das Inkrement $\Delta \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ wird die multiplikative Zerlegung

$$\Delta \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\boldsymbol{\chi}(\mathbf{Y}) : \nabla_{\mathbf{X}} (\Delta \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) \quad (7.58)$$

vorgeschlagen, wobei der dreistufige Tensor $\boldsymbol{\chi}$ in [81] als *inkrementelle charakteristische Verschiebung* bezeichnet wird. Ansatz (7.58) beruht auf Gleichung (4.11) der asymptotischen mathematischen Homogenisierung für lineare Probleme.

Die gesuchte Approximation des makroskopischen Tangententensors gewinnen wir mithilfe der aus Kapitel 5.5 bekannten Definitionen $\mathbf{F}^M = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \mathbf{I}$ und $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{I}$ gemäß der Umrechnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M} &= \frac{\partial \langle \mathbf{P}^0 \rangle_{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{F}^M} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^M} \right\rangle_{\mathbf{Y}} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : \frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial \mathbf{F}^M} \right\rangle_{\mathbf{Y}} \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : \frac{\partial (\mathbf{F}^M + \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{I})}{\partial \mathbf{F}^M} \right\rangle_{\mathbf{Y}} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : \left(\mathbf{I}_4 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{F}^M} \right) \right\rangle_{\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : \left(\mathbf{I}_4 + \frac{\Delta \tilde{\mathbf{F}}}{\Delta \mathbf{F}^M} \right) \right\rangle_Y = \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : \left(\mathbf{I}_4 + \frac{\nabla_Y \Delta \mathbf{u}^1}{\nabla_X \Delta \mathbf{u}^0} \right) \right\rangle_Y \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : \left(\mathbf{I}_4 - \frac{\nabla_Y (\boldsymbol{\chi} : \nabla_X \Delta \mathbf{u}^0)}{\nabla_X \Delta \mathbf{u}^0} \right) \right\rangle_Y = \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : \left(\mathbf{I}_4 - \frac{\nabla_Y \boldsymbol{\chi} : \nabla_X \Delta \mathbf{u}^0}{\nabla_X \Delta \mathbf{u}^0} \right) \right\rangle_Y \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : (\mathbf{I}_4 - \nabla_Y \boldsymbol{\chi}) \right\rangle_Y, \tag{7.59}
\end{aligned}$$

wobei \mathbf{I}_4 den Einheitstensor vierter Stufe darstellen soll. Vergleichen wir die rechte Seite von (7.59) mit der Größe a_{ijkl}^{hom} der asymptotischen mathematischen Homogenisierung für dreidimensionale lineare Probleme in Gleichung (4.20), so fällt auf, daß beide Terme identisch sind. Die in [81] vorgeschlagene und soeben diskutierte Methode stellt damit gewissermaßen eine lineare Approximation des exakten aber unbekannten makroskopischen Tangententensors dar.

Herleitung des Tangenten-Hilfsproblems zur Bestimmung von $\boldsymbol{\chi}$ (Y)

Für einen beliebig gewählten Punkt $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ bilden wir den makroskopischen Tangententensor genau dann, wenn das zugehörige mikroskopische Problem bereits konvergiert ist. Für diesen konvergierten Fall folgt aus der Beziehung $\mathcal{F}_{t+\Delta t}(\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\omega}) + \delta \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\omega})(\Delta \boldsymbol{\omega}) = 0$ für jedes \mathbf{X} innerhalb des aktuellen makroskopischen Iterationsschrittes die Gleichung

$$\delta \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\omega})(\Delta \boldsymbol{\omega}) = 0. \tag{7.60}$$

Für einen konsistenten Übergang zwischen mikro- und makroskopischer Ebene wird die erste Variation in Gleichung (7.60) durch eine *simultane* Linearisierung bezüglich \mathbf{X} und \mathbf{Y} gewonnen. Dieser Vorgang wird in [81] auch als *Zweiskalenlinearisierung* bezeichnet. Ähnlich wie in Gleichung (7.15) ist die erste Variation damit für $\omega_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\partial u_i^0}{\partial X_j}(\mathbf{X})Y_j + u_i^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ durch

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\omega})(\Delta \boldsymbol{\omega}) &= \delta \tilde{\mathcal{F}}_t(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1)(\Delta \mathbf{u}^0, \Delta \mathbf{u}^1) \\
&= - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial \delta \omega_i}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\frac{\partial \Delta u_k^0}{\partial X_l} + \frac{\partial \Delta u_k^1}{\partial Y_l} \right) d\mathbf{Y} \tag{7.61}
\end{aligned}$$

gegeben. Aus Gleichung (7.58) ermitteln wir für den Gradienten der mikroskopischen Fluktuation die Beziehung

$$\frac{\partial \Delta u_k^1}{\partial Y_l} = - \frac{\partial}{\partial Y_l} \left(\chi_{kmn} \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n} \right) = - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n}, \tag{7.62}$$

woraus zusammen mit (7.60) und (7.61) die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial \delta \omega_i}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\frac{\partial \Delta u_k^0}{\partial X_l} - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n} \right) dY \\
&= \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \frac{\partial \delta \omega_i}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n} dY
\end{aligned} \tag{7.63}$$

folgt. Die Anwendung partieller Integration führt zusammen mit dem Wissen, daß die Größen $\delta \omega_i$, $\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0}$, $\frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l}$ und natürlich $\delta_{km} \delta_{ln}$ sowie $\frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n}$ jeweils $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -periodisch sind, zu der Darstellung

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} n_j \delta \omega_i \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n} dY \\
&\quad - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta \omega_i \frac{\partial}{\partial Y_j} \left[\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n} \right] dY \\
&= - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta \omega_i \frac{\partial}{\partial Y_j} \left[\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n} \right] dY,
\end{aligned} \tag{7.64}$$

wobei $n_j(\mathbf{Y})$ das Einheitsaußennormalenfeld an $\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ darstellen soll. Da $\delta \omega_i$ beliebig gewählt werden darf, erhalten wir daraus die lokale Beziehung

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial Y_j} \left[\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial Y_j} \left[\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) \right] \frac{\partial \Delta u_m^0}{\partial X_n},
\end{aligned} \tag{7.65}$$

welche fast überall in $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ erfüllt sein muß. Das Inkrement des makroskopischen Verschiebungsgradienten können wir durch unterschiedliche äußere Belastungen beliebig vorgeben. Damit leiten wir aus (7.65) die als *Tangenten-Hilfsproblem* bezeichnete lokale Beziehung

$$0 = \frac{\partial}{\partial Y_j} \left(\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{mn}^0} \right) - \frac{\partial}{\partial Y_j} \left(\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) \quad \text{fast überall in } \mathcal{Y}_{\mathcal{R}} \tag{7.66}$$

ab. Mathematisch ist (7.66) äquivalent zu Gleichung (4.19), wobei der dort verwendete Koeffiziententensor a_{ijmn} für den Sonderfall linearer Spannungs-Dehnungsbeziehungen mit $\frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0}$ zusammenfällt. Gemäß der asymptotischen mathematischen Theorie besitzt (7.66) eine eindeutige Lösung in $W_{per}(\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}; \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3})$, weswegen χ analog zur mikroskopischen Fluktuation \mathbf{u}^1 nur

bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmbar ist. Dies impliziert neben der geforderten $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität von χ_{kmn} die komponentenweise Nebenbedingung

$$\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \chi_{kmn} dY = 0. \quad (7.67)$$

Zur Bestimmung der hier vorgeschlagenen Tangentenapproximation müssen wir demnach für jeden makroskopischen Punkt $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ und jeden makroskopischen Iterationsschritt das Tangenten-Hilfsproblem (7.66) lösen. Zuvor muß das mikroskopische Problem aus Abschnitt 7.4 für die Kenntnis von $\frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0}$ eine konvergente Lösung erzeugt haben. Mithilfe der dadurch gewonnenen inkrementellen charakteristischen Verschiebung χ können wir deren Gradienten $\nabla_Y \chi$ und damit den gesuchten Tensor $\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M}$ gemäß Gleichung (7.59) bestimmen.

Einbettung des Tangenten-Hilfsproblems (7.66) in die Finite-Elemente-Umgebung

Die Finite-Elemente-Formulierung des Problems (7.66) erfolgt aufgrund derselben Rand- und Nebenbedingungen analog zur Formulierung des mikroskopischen Problems zur Bestimmung von \mathbf{u}^1 . Aus diesem Grund wählen wir eine knappe Darstellung der Herleitung. Iterationsschritte markieren wir für das Tangenten-Hilfsproblem mit einem hochgestellten (k) . Mit der beliebigen, aber kinematisch verträglichen Variation $\delta \chi_{imn}$ folgt aus (7.66) die schwache Form

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta \chi_{imn} \frac{\partial}{\partial Y_j} \left(\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{mn}^0} \right) - \delta \chi_{imn} \frac{\partial}{\partial Y_j} \left(\frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} \right) dY \\ &= \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} -\frac{\partial \delta \chi_{imn}}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{mn}^0} + \frac{\partial \delta \chi_{imn}}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} dY, \end{aligned} \quad (7.68)$$

wobei bei der partiellen Integration die $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}$ -Periodizität der Integranden ausgenutzt wurde. Unter Hinzunahme aller zusätzlichen Bedingungen definieren wir das Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t(\chi, \alpha, \beta^\kappa) &:= \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} -\frac{\partial \delta \chi_{imn}}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{mn}^0} + \frac{\partial \delta \chi_{imn}}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial Y_l} dY \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^3 \left\{ \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} \delta \beta_{imn}^\kappa (\chi_{imn}^+ - \chi_{imn}^-) dY + \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} \beta_{imn}^\kappa (\delta \chi_{imn}^+ - \delta \chi_{imn}^-) dY \right\} \\ &\quad + \alpha_{imn} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta \chi_{imn} dY + \delta \alpha_{imn} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \chi_{imn} dY, \end{aligned} \quad (7.69)$$

wobei β_{imn}^κ und α_{imn} Lagrange'sche Multiplikatoren darstellen. Zur Bestimmung des nächsten Quasizeitschrittes $t + \Delta t$ muß gemäß dem Newton-Verfahren die Beziehung

$$0 = \mathcal{F}_t \left(\boldsymbol{\chi}^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}^{(k)}, \boldsymbol{\beta}^{\kappa^{(k)}} \right) + \delta \mathcal{F}_t \left(\boldsymbol{\chi}^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}^{(k)}, \boldsymbol{\beta}^{\kappa^{(k)}} \right) \left(\Delta \boldsymbol{\chi}^{(k)}, \Delta \boldsymbol{\alpha}^{(k)}, \Delta \boldsymbol{\beta}^{\kappa^{(k)}} \right) \quad (7.70)$$

erfüllt sein. Daraus folgt für die gesuchten Größen χ_{kmn} , β_{imn}^κ und α_{imn} die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} -\frac{\partial \delta \chi_{imn}}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{mn}^0} + \frac{\partial \delta \chi_{imn}}{\partial Y_j} \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} \frac{\partial (\chi_{kmn} + \Delta \chi_{kmn})}{\partial Y_l} dY \right. \\ & + \sum_{\kappa=1}^3 \left[\int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} \delta \beta_{imn}^\kappa (\chi_{imn}^+ + \Delta \chi_{imn}^+ - \chi_{imn}^- - \Delta \chi_{imn}^-) dY \right. \\ & \left. + \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^\kappa} (\beta_{imn}^\kappa + \Delta \beta_{imn}^\kappa) (\delta \chi_{imn}^+ - \delta \chi_{imn}^-) dY \right] \\ & \left. + (\alpha_{imn} + \Delta \alpha_{imn}) \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \delta \chi_{imn} dY + \delta \alpha_{imn} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}} \chi_{imn} + \Delta \chi_{imn} dY \right\}^{(k)}. \quad (7.71) \end{aligned}$$

Die Diskretisierung von (7.71) ergibt unter Verwendung von $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)}$ zusammen mit den Definitionen der konstanten Größen

$$\begin{aligned} \overline{\chi}_{27(A-1)+9(i-1)+3(m-1)+n} &:= \chi_{imn}^A, & \overline{\delta \chi}_{27(A-1)+9(i-1)+3(m-1)+n} &:= \delta \chi_{imn}^A, \\ \overline{\chi}_{27(C-1)+9(i-1)+3(m-1)+n}^+ &:= \chi_{imn}^{+C}, & \overline{\chi}_{27(C-1)+9(i-1)+3(m-1)+n}^- &:= \chi_{imn}^{-C}, \\ \overline{\delta \chi}_{27(C-1)+9(i-1)+3(m-1)+n}^+ &:= \delta \chi_{imn}^{+C}, & \overline{\delta \chi}_{27(C-1)+9(i-1)+3(m-1)+n}^- &:= \delta \chi_{imn}^{-C}, \\ \overline{\beta}_{27(C-1)+9(i-1)+3(m-1)+n}^\kappa &:= \beta_{imn}^{\kappa C}, & \overline{\delta \beta}_{27(C-1)+9(i-1)+3(m-1)+n}^\kappa &:= \delta \beta_{imn}^{\kappa C}, \\ \overline{\alpha}_{9(i-1)+3(m-1)+n} &:= \alpha_{imn}, & \overline{\delta \alpha}_{9(i-1)+3(m-1)+n} &:= \delta \alpha_{imn}, \end{aligned}$$

für jedes mikroskopische Volumenelement $\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e$ und die ausgewählten Oberflächenelemente $\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}$ die nach Variationstypen unterteilten, neu indizierten Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 = & \overline{\delta \chi}_{27(A-1)+9(i-1)+3(j-1)+k} \left[- \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial Y_o} \frac{\partial P_{io}^0}{\partial F_{jk}^0} dY \right)^{(k)} + \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial Y_o} \frac{\partial P_{io}^0}{\partial F_{pq}^0} \frac{\partial N^B}{\partial Y_q} \delta_{pl} \delta_{jm} \delta_{kn} dY \right)^{(k)} \right. \\ & \left. + \overline{\chi}_{27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(k+1)} + \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} N^A \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} dY \right)^{(k)} \overline{\alpha}_{9(l-1)+3(m-1)+n}^{(k+1)} \right], \quad (7.72) \end{aligned}$$

$$0 = \overline{\delta \alpha}_{9(i-1)+3(j-1)+k} \left(\int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} N^B dY \right)^{(k)} \overline{\chi}_{27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(k+1)}, \quad (7.73)$$

$$0 = \overline{\delta \beta^\kappa}_{27(D-1)+9(i-1)+3(j-1)+k} \left[\left(\int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} M^D dY \right)^{(k)} \right. \\ \left. \left(\overline{\chi}^+_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n} - \overline{\chi}^-_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n} \right)^{(k+1)} \right] \quad (7.74)$$

für jedes $\kappa = 1, 2, 3$,

$$0 = \overline{\delta \chi^+}_{27(D-1)+9(i-1)+3(j-1)+k} \left(\int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} M^D dY \right)^{(k)} \overline{\beta^\kappa}_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(k+1)} \quad (7.75)$$

für jedes $\kappa = 1, 2, 3$ und

$$0 = \overline{\delta \chi^-}_{27(D-1)+9(i-1)+3(j-1)+k} \left(- \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} M^D dY \right)^{(k)} \overline{\beta^\kappa}_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(k+1)} \quad (7.76)$$

für jedes $\kappa = 1, 2, 3$.

Wir definieren

$$\mathbb{K}_{(1,1)} \hat{=} k_{27(A-1)+9(i-1)+3(j-1)+k, 27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(1,1)} \\ := \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial Y_o} \frac{\partial P_{io}^0}{\partial F_{pq}^0} \frac{\partial N^B}{\partial Y_q} \delta_{pl} \delta_{jm} \delta_{kn} dY, \quad (7.77)$$

$$\mathbb{K}_{(1,2)} \hat{=} k_{27(A-1)+9(i-1)+3(j-1)+k, 9(l-1)+3(m-1)+n}^{(1,2)} := \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} N^A dY, \quad (7.78)$$

$$\mathbb{K}_{(1,\kappa+2)} \hat{=} k_{27(A-1)+9(i-1)+3(j-1)+k, 27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(1,\kappa+2)} \\ := \begin{cases} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{\delta \chi^+}_{27(D-1)+9(i-1)+3(j-1)+k} \\ & \text{und } \overline{\delta \chi}_{27(A-1)+9(i-1)+3(j-1)+k}, \\ -\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{\delta \chi^-}_{27(D-1)+9(i-1)+3(j-1)+k} \\ & \text{und } \overline{\delta \chi}_{27(A-1)+9(i-1)+3(j-1)+k} \\ & \text{auf denselben Knoten beziehen,} \\ 0 & \text{sonst, für jedes } \kappa = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (7.79)$$

$$\mathbb{K}_{(2,1)} \hat{=} k_{9(i-1)+3(j-1)+k, 27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(2,1)} := \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} N^B dY, \quad (7.80)$$

$$\mathbb{K}_{(\kappa+2,1)} \hat{=} k_{27(D-1)+9(i-1)+3(j-1)+k, 27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(\kappa+2,1)} := \begin{cases} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{\chi}^+_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n} \\ & \text{und } \overline{\chi}_{27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}, \\ -\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \int_{\partial \mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^{\kappa e}} M^C M^D dY, & \text{wenn sich } \overline{\chi}^-_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n} \\ & \text{und } \overline{\chi}_{27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n} \\ & \text{auf denselben Knoten beziehen,} \\ 0 & \text{sonst, für jedes } \kappa = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (7.81)$$

$$\mathbb{F}_{(1)} \hat{=} f_{27(A-1)+9(i-1)+3(j-1)+k}^{(1)} := - \int_{\mathcal{Y}_{\mathcal{R}}^e} \frac{\partial N^A}{\partial Y_o} \frac{\partial P_{io}^0}{\partial F_{jk}^0} dY, \quad (7.82)$$

$$\mathbb{X}_{(1)} \hat{=} x_{27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(1)} := \overline{\chi}_{27(B-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}, \quad (7.83)$$

$$\mathbb{X}_{(2)} \hat{=} x_{9(l-1)+3(m-1)+n}^{(2)} := \overline{\alpha}_{9(l-1)+3(m-1)+n} \quad \text{und} \quad (7.84)$$

$$\mathbb{X}_{(\kappa+2)} \hat{=} x_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n}^{(\kappa+3)} := \overline{\beta}^{\kappa}_{27(C-1)+9(l-1)+3(m-1)+n} \quad \text{für jedes } \kappa = 1, 2, 3. \quad (7.85)$$

Wir beziehen die Knotenindizes A, B, C und D auf die globale Knotenindizierung des Netzes. Damit läßt sich die Iterationsvorschrift (7.71) unter Verwendung des gestörten Lagrange-Verfahrens mit dem Störparameter $\tau > 0$ als das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{(1,1)} & \mathbb{K}_{(1,2)} & \mathbb{K}_{(1,3)} & \mathbb{K}_{(1,4)} & \mathbb{K}_{(1,5)} \\ \mathbb{K}_{(2,1)} & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_{(3,1)} & 0 & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbb{K}_{(4,1)} & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} & 0 \\ \mathbb{K}_{(5,1)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \mathbf{1} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{(1)} \\ \mathbb{X}_{(2)} \\ \mathbb{X}_{(3)} \\ \mathbb{X}_{(4)} \\ \mathbb{X}_{(5)} \end{bmatrix}^{(k+1)} = - \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{(k)} \quad (7.86)$$

darstellen, wobei analog zum mikroskopischen Problem die Transpositionen $\mathbb{K}_{(1,2)} = \mathbb{K}_{(2,1)}^T$, $\mathbb{K}_{(1,3)} = \mathbb{K}_{(3,1)}^T$, $\mathbb{K}_{(1,4)} = \mathbb{K}_{(4,1)}^T$ und $\mathbb{K}_{(1,5)} = \mathbb{K}_{(5,1)}^T$ gelten.

Im Vergleich zum Auffinden von \mathbf{u}^1 müssen für die inkrementelle charakteristische Verschiebung χ 9-mal so viele Komponenten ermittelt werden. Die Anzahl der Lagrange'schen Multiplikatoren richtet sich sowohl für die Volumen- als auch für die periodischen Randbedingungen nach der Anzahl der gesuchten Variablenfreiheitsgrade. Legen wir ein mikroskopisches $10 \times 10 \times 10$ -Netz zugrunde, welches zum Ausgangszeitpunkt aus rechteckigen Elementen bestehen soll, so verfügt dieses auf jeder Seitenfläche über 121 und im gesamten Volumenbereich über 1331 Knoten. Das zahlenmäßige Verhältnis der zu bestimmenden Freiheitsgrade zwischen den beiden Gleichungssystemen (7.50) und (7.86) ist in diesem Beispiel gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Anzahl } \mathbb{X}_{ges}^{\mathbf{u}^1} \div \text{Anzahl } \mathbb{X}_{ges}^{\boldsymbol{\chi}} &= (1331 \cdot 3 + 3 \cdot 121 \cdot 3 + 3) \div (1331 \cdot 27 + 3 \cdot 121 \cdot 27 + 27) \\ &= 5085 \div 36364 \approx 1 \div 7. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Unter Berücksichtigung der Ordnung des verwendeten Gleichungslösers stellt sich ein im Vergleich zu (7.87) noch weit ungünstigeres Verhältnis der tatsächlichen Rechenzeiten auf einem Referenzcomputer ein. Dieser Effekt wird durch das lineare Auftreten von $\boldsymbol{\chi}$ in (7.66) glücklicherweise begrenzt: das Newton-Verfahren (7.70) benötigt nur eine Iteration.

Berechnung von $\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M}$ mithilfe von $\boldsymbol{\chi}$

Die Berechnung der makroskopischen Tangente $\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M}$ unter Verwendung der Regel

$$\frac{\partial \mathbf{P}^M}{\partial \mathbf{F}^M} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : (\mathbf{I}_4 - \nabla_Y \boldsymbol{\chi}) \right\rangle_Y \quad (7.88)$$

erfolgt, indem der innere Teil dieser Volumenmittelung gemäß der Vorschrift

$$\frac{\partial \mathbf{P}^0}{\partial \mathbf{F}^0} : (\mathbf{I}_4 - \nabla_Y \boldsymbol{\chi}) \cong \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{kl}^0} - \frac{\partial P_{ij}^0}{\partial F_{mn}^0} \frac{\partial N^A}{\partial Y_n} \chi_{mkl}^A \quad (7.89)$$

für jeden mikroskopischen Gaußpunkt gebildet wird. Die Diskretisierung von $\boldsymbol{\chi}$ ist deswegen erforderlich, da dessen Werte nur an den Netzknoten, nicht aber an den Gaußpunkten vorliegen. Die eigentliche Volumenmittelung kann zusammen mit derjenigen der mikroskopischen Spannung durchgeführt werden.

7.6 Validierung des homogenisierten Modells durch Vergleich mit fein-vernetzten einskaligen Simulationen

In diesem Abschnitt vergleichen wir die mit der Finiten-Elemente-Methode gewonnenen numerischen Ergebnisse der homogenisierten isotropen kompressiblen Neo-Hooke-Elastizität für große Deformationen mit denjenigen Ergebnissen, welche durch fein-vernetzte einskalige Rechnungen gewonnen werden. Dazu werden an einem makroskopischen Einheitswürfel die folgenden Belastungsarten simuliert:

- Scherung in X_2 -Richtung
- axialer Zug in X_2 -Richtung
- axialer Zug in X_3 -Richtung
- Torsion um die X_3 -Achse

Im Rahmen des Scherversuchs vergleichen wir in einer ersten Simulationsreihe die vorgestellten Ansätze zur Ermittlung des makroskopischen Tangententensors miteinander und untersuchen in einer zweiten Serie verschiedene mikro- und makroskopische Vernetzungen. Basierend auf diesen Ergebnissen wählen wir die schnellste Tangentenmethode sowie die genaueste Vernetzungsvariante und simulieren mit dieser Wahl die angedachten Zug- und Torsionsversuche.

Modellierte Materialien

Zur Untersuchung eines heterogenen Werkstoffes verwenden wir ein periodisches Zweischichtenmaterial, dessen Lagen alle gleich dick sind und sich gemäß Abbildung 7.8 nur in X_3 -Richtung abwechseln sollen. Dies birgt den modellierungstechnischen Vorteil, daß zur Erzielung einer feinen Mikrostruktur die einskalige Vernetzung nur in X_3 -Richtung sehr dicht gewählt werden muß. Zusätzlich nehmen wir perfekte Haftung zwischen den einzelnen Schichten an. Das

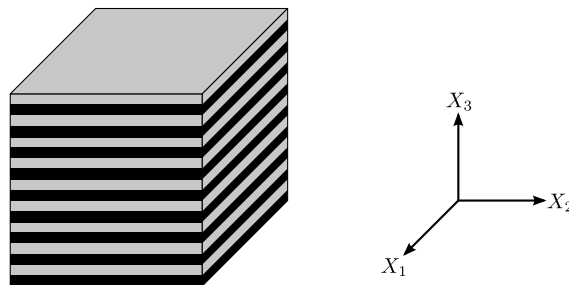


Abbildung 7.8: Schematische Darstellung des periodischen Zweischichtenmaterials

Problem eines heterogenen Materials liegt jedoch in der Abhängigkeit der Ergebnisse von dem in Abschnitt 3.2 eingeführten Skalierungsparameter ε . Gemäß Kapitel 5 konvergiert das einskalige heterogene Modell für $\varepsilon \rightarrow 0$ zweiskalig gegen das homogenisierte Problem. Damit impliziert eine konkrete Wahl von ε das Auftreten möglicher Abweichungen der Ergebnisse, da der Grenz-

wertprozeß $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht vollständig vollzogen worden ist. Aus diesem Grund verwenden wir bei der Simulation des Scherversuchs zusätzlich ein homogenes Material. Zwar läßt sich anhand dieser Rechnungen das Kernstück jeder Homogenisierungstechnik – die Bestimmung von Materialantworten inhomogener Probleme – nicht begutachten, doch ist aufgrund der nicht vorhandenen Abhängigkeit von ε eine grundsätzliche Güteprüfung des gesamten zweiskaligen numerischen Schemas möglich.

Tabelle 7.4 führt die im Neo-Hooke-Gesetz (5.146) verwendeten Parameter für beide Materialtypen auf. Dabei spiegelt Schicht 1 die hyperelastischen Eigenschaften von Titan wider, Schicht 2 und das homogene Material hingegen diejenigen eines ferritischen Stahls [24].

Parameter	homogen	Schicht 1	Schicht 2
E [MPa]	210.000	105.000	210.000
ν [-]	0,3	0,34	0,3

Tabelle 7.4: Parameter des Neo-Hooke-Gesetzes für die beiden verwendeten Materialtypen

Allgemeine Informationen zu den fein-vernetzten einskaligen Referenzrechnungen

Für die einskaligen Rechnungen bilden wir den Einheitswürfel beim Zweischichtenmaterial mit $10 \times 10 \times 2000$ Elementen ab. Damit ist das Verhältnis zwischen makroskopischer Körperdimension und mikroskopischer Struktur durch $\varepsilon = 10^{-3}$ gegeben. Für das homogene Material verwenden wir eine gröbere Diskretisierung mit $10 \times 10 \times 10$ Elementen. Die Konvergenz des numerischen Verfahrens überprüfen wir in beiden Fällen mit einer Toleranzschwelle von 10^{-12} .

Allgemeine Informationen zu den homogenisierten Rechnungen

Die Konvergenz jeder zweiskaligen homogenisierten Rechnung überprüfen wir sowohl auf der mikroskopischen als auch auf makroskopischen Ebene mit der Toleranzschwelle 10^{-10} . Den Parameter τ des zugrunde liegenden gestörten Lagrange-Verfahrens wählen wir im Einklang mit den Resultaten aus Kapitel 7.4 mit 10^{15} .

Verwendete Vergleichsgrößen

Als Vergleichsgröße benutzen wir für jeden untersuchten Wert die makroskopische Volumenmitteilung

$$A_{ij}^{eq} := \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{R}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} A_{ij} \, dX & \text{für die einskalige Rechnung,} \\ \frac{1}{|\mathcal{R}_{\mathcal{R}}|} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}} A_{ij}^M \, dX & \text{für die homogenisierte Rechnung.} \end{cases} \quad (7.90)$$

Für alle Größen des homogenisierten Problems entspricht (7.90) gemäß Satz 23 dem Begriff des schwachen Grenzwertes bei gewählter Eins als Testfunktionen.

7.6.1 Simulierter Scherversuch in X_2 -Richtung

Die angedachte Scherung simulieren wir in der X_2 - X_3 -Ebene, wobei im Unterschied zu der in Kapitel 7.4 durchgeführten einfachen Variante auch komplexe Spannungszustände und Verwölbungen an den Seitenflächen entstehen können. Die gewünschte Deformation von insgesamt 50 Prozent legen wir dem betrachteten Körper innerhalb von 10 gleichmäßigen Quasizeitschritten in X_2 -Richtung auf. Bei festgehaltenem Boden wird damit die obere Randfläche um 0,5 Längeneinheiten in ebendiese Richtung verschoben. Abbildung 7.9 deutet den Vorgang an.

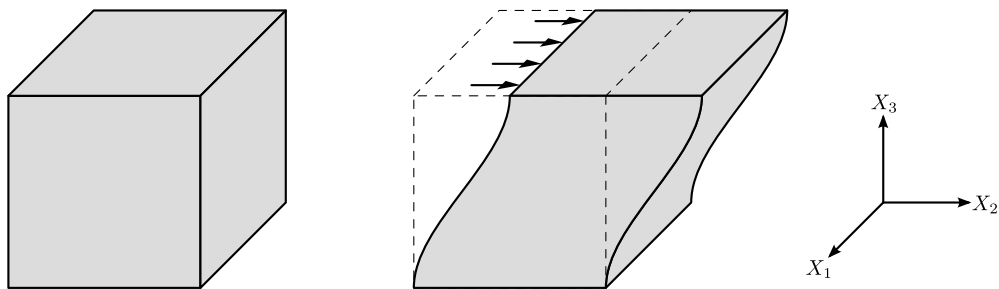


Abbildung 7.9: Scherung in der X_2 - X_3 -Ebene in X_2 -Richtung

Homogenisiertes Problem – Vergleich der Laufzeiten der drei vorgeschlagenen Bestimmungsmethoden des makroskopischen Tangententensors

Für den Vergleich der gemittelten Tangente (7.56) mit der numerischen Variante (7.57) und der aus dem Tangenten-Hilfsproblem (7.66) gewonnenen Größe (7.59) benutzen wir für beide Materialtypen ein makroskopisches $3 \times 3 \times 3$ - und ein mikroskopisches $4 \times 4 \times 4$ -Netz, wobei letzteres beim Zweischichtenmaterial gemäß Abbildung 7.10 modelliert ist. Eine größere Wahl des mikroskopischen Netzes hätte bei der Lösung des Tangenten-Hilfsproblems den im Referenzcomputer verfügbaren Arbeitsspeicher von 4 GB überschritten. Für komplexere Mikrostrukturen – insbesondere solche mit Aussparungen – ist das Zusammenfassen mehrerer Einheitszellen zu einem repräsentativen Volumenelement erwägenswert, da dadurch die Stabilität der Simulation im Zusammenhang mit Bifurkationseffekten erhöht werden kann [75].

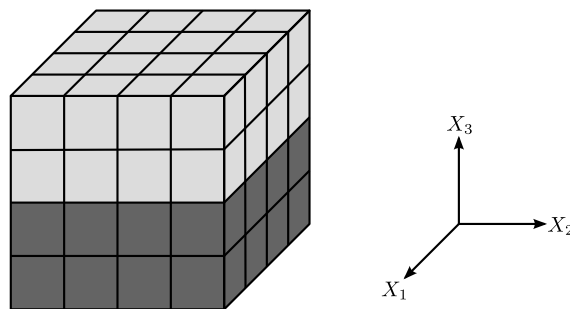


Abbildung 7.10: Mikroskopisches $4 \times 4 \times 4$ -Netz für das Zweischichtenmaterial

Jede der drei untersuchten Tangentenvarianten führt für die gewünschte Genauigkeit von 10^{-10} zu einer konvergenten und diesbezüglich übereinstimmenden Lösung. Bei der gemittelten Methode konnte erwartungsgemäß keine quadratische Konvergenzordnung des makroskopischen Newton-Verfahrens festgestellt werden, da dieses Verfahren als inkonsistent bekannt ist. Dasselbe Resultat gilt jedoch auch für die vermeintlich genauere Variante des Tangenten-Hilfsproblems: eine quadratische Ordnung stellt sich nicht ein. Allgemein wurde die vorgegebene makroskopische Konvergenzschwelle durchschnittlich erst nach 8 bis 9 Iterationsschritten erreicht. Im Mikroskopischen hingegen kann stets eine quadratische, meist sogar deutlich höhere Konvergenzordnung beobachtet werden. Dort sind durchschnittlich 2 bis 3 Iterationen bis zum Erreichen der Toleranz notwendig. Die in dieser Simulation gewonnenen Spannungsverläufe können für das homogene Material in der Abbildung 7.11 und für das Zweischichtenmaterial in der Abbildung 7.12 anhand der $3 \times 3 \times 3$ - $4 \times 4 \times 4$ -Kurven abgelesen werden.

In Tabelle 7.5 sind die Laufzeitverhältnisse, welche anhand der absoluten Rechenzeiten auf dem Referenzcomputer bestimmt wurden, bezüglich der gemittelten Tangentenvariante angegeben. Demnach benötigt die numerische Tangentenbestimmung auf dem Referenzcomputer beim Zweischichtenmaterial knapp fünfmal und die Methode des Tangenten-Hilfsproblems sogar gut 152-mal soviel Zeit wie die gemittelte Variante. Mit dem Wissen, daß alle drei Methoden

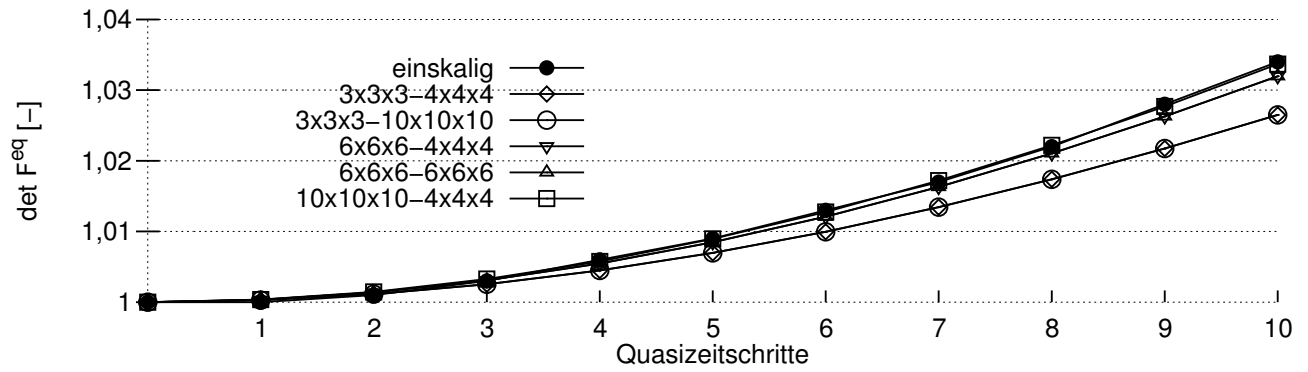
Materialtyp	Tangentenvariante	Laufzeitverhältnis [-]
homogen	gemittelt	1,0
	numerisch	10,70
	THP	162,0
zweischichtig	gemittelt	1,0
	numerisch	4,94
	THP	152,45

Tabelle 7.5: Laufzeitverhältnisse auf dem Referenzcomputer

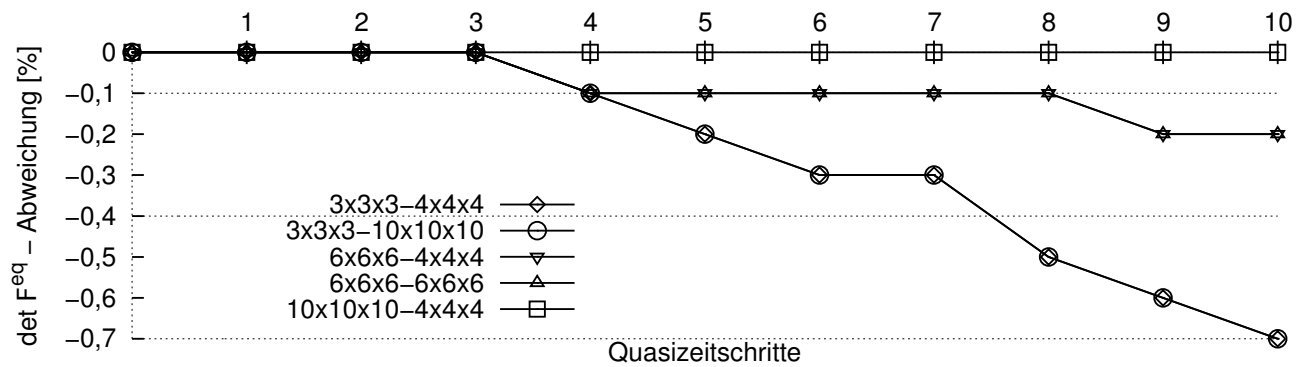
die geforderte Konvergenztoleranz erreichen, empfiehlt sich die gemittelte Variante aufgrund ihrer kürzesten Laufzeit zur weiteren Verwendung. Für alle noch folgenden Simulationen dieser Arbeit werden wir daher die gemittelte makroskopische Tangente bestimmen, sofern mit dem homogenisierten Modell gerechnet wird.

Homogenisiertes und einkaliges Problem - Vergleich verschiedenener makroskopischer und mikroskopischer Netze mit der einkaligen Referenz

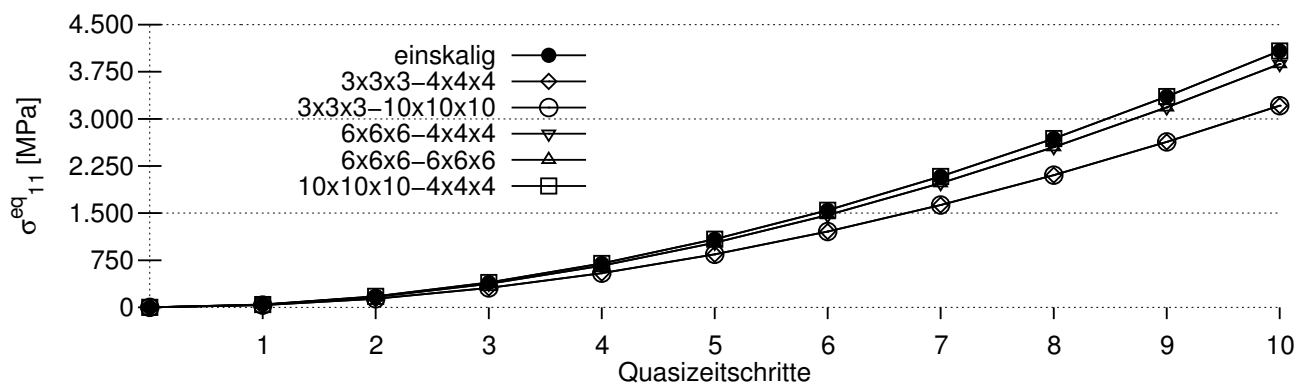
In Abbildung 7.11 sind die von Null verschiedenen Spannungskomponenten und die Determinante des Deformationsgradienten für das homogene Material für alle verwendeten Netze dargestellt. Zusätzlich ist für jede gezeigte Größe der Verlauf der prozentualen Abweichung eingezeichnet, welche auf den jeweils zugehörigen Wert der einkaligen Referenzrechnung bezogen ist. In den Legenden der nachfolgenden Abbildungen steht die erste Angabe für die makroskopische und die zweite Angabe für die mikroskopische Diskretisierung, sofern es sich nicht um die einkalige Vergleichsrechnung handelt.



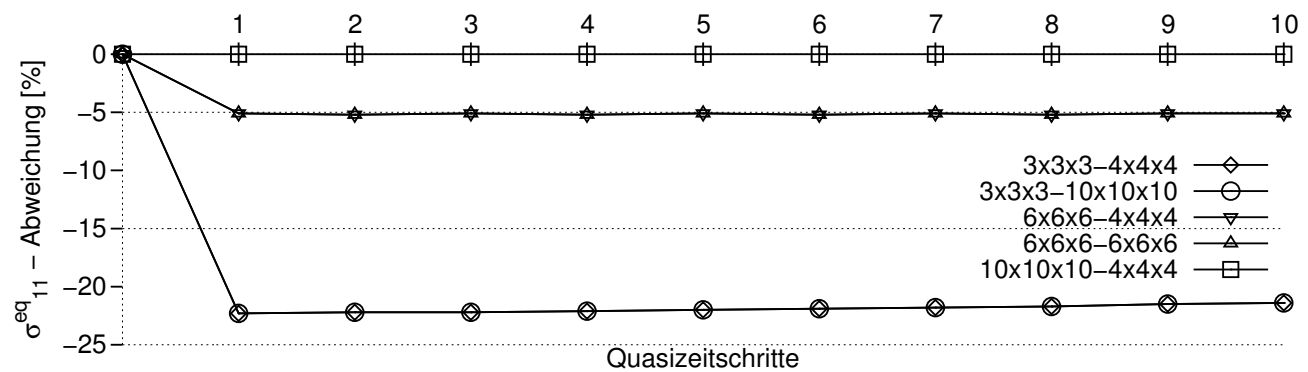
(a) Verläufe der Determinante $\det F^{eq}$



(b) Abweichungen von $\det F^{eq}$ bezüglich der einskaligen Rechnung



(c) Verläufe der Spannungskomponente σ_{11}^{eq}



(d) Abweichungen von σ_{11}^{eq} bezüglich der einskaligen Rechnung

Abbildung 7.11: Verläufe und Abweichungen beim homogenen Material

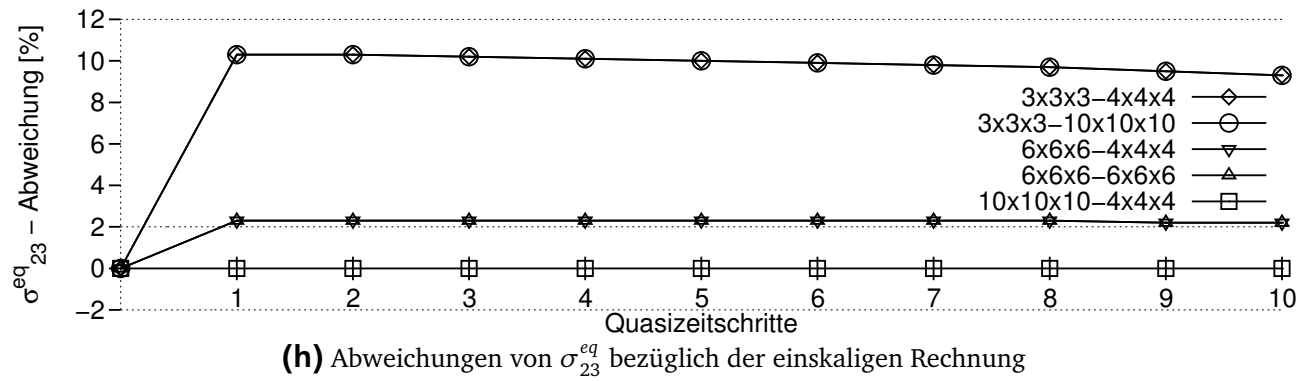
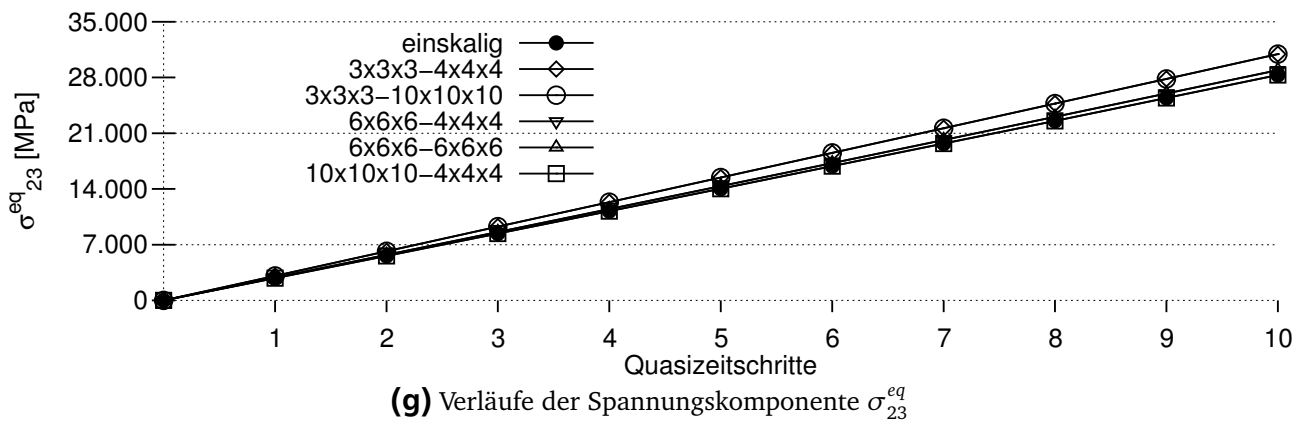
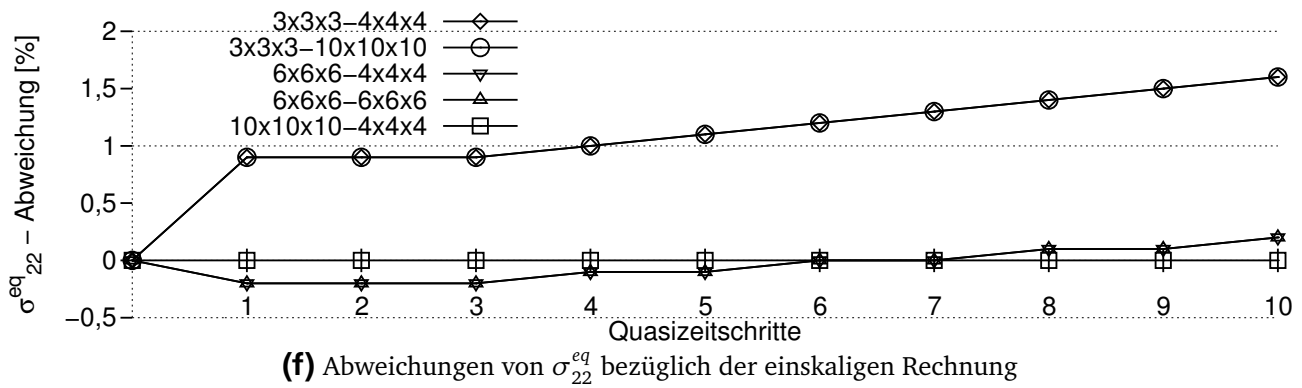
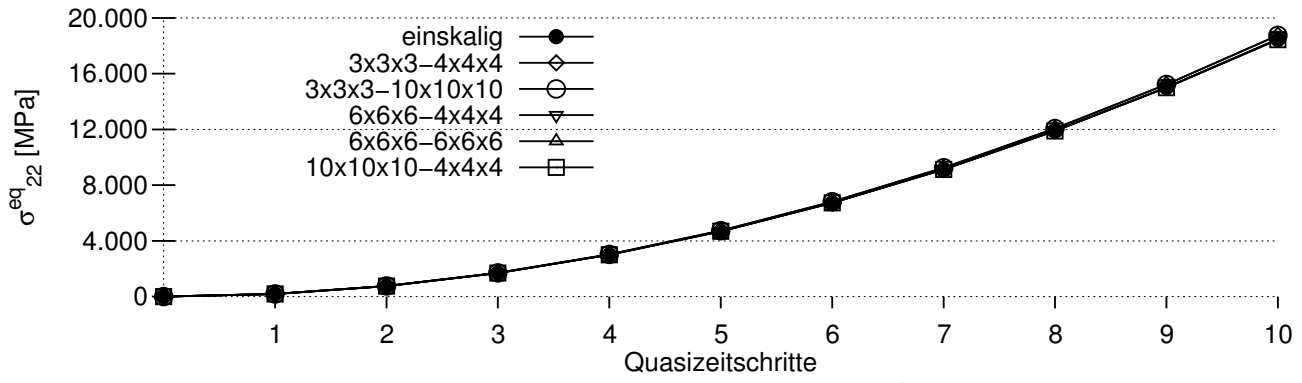


Abbildung 7.11: Verläufe und Abweichungen beim homogenen Material

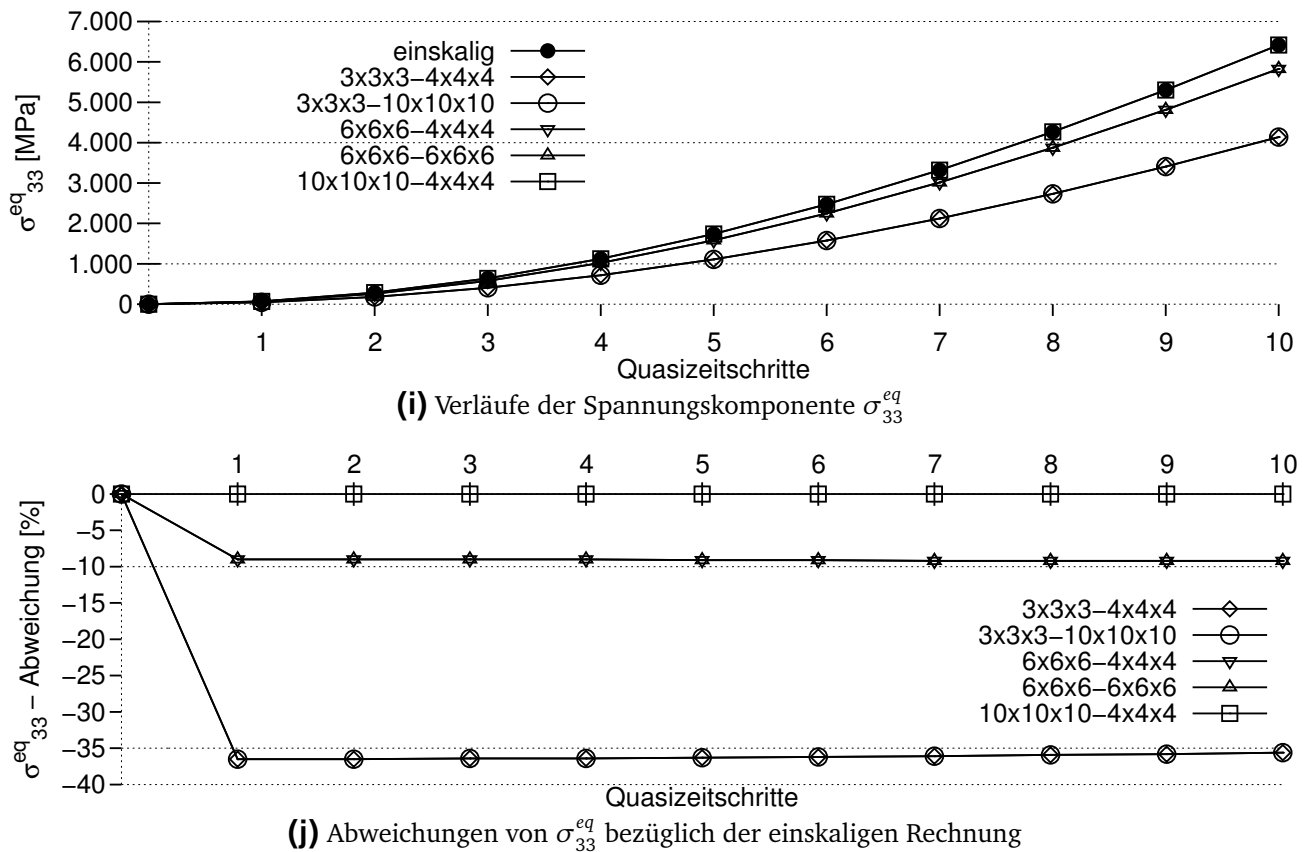


Abbildung 7.11: Verläufe und Abweichungen beim homogenen Material

Anhand der Verläufe erkennen wir, daß die Feinheit der mikroskopischen Vernetzung auf die makroskopischen Endergebnisse wenig Einfluß auszuüben scheint. Viel entscheidender ist die makroskopische Ebene. Je feiner wir dort den Einheitswürfel diskretisieren, desto kleiner werden die Abweichungen. Für den hier gezeigten Sonderfall der makroskopischen Diskretisierung mit $10 \times 10 \times 10$ Elementen, für den dieses Netz mit demjenigen der einskaligen Referenz exakt übereinstimmt, läßt sich keine Abweichung der Ergebnisse mehr feststellen. Es ist jedoch leicht nachvollziehbar, daß bei einem heterogenen Material die makroskopische Vernetzung des homogenisierten Problems niemals so fein gewählt werden kann wie diejenige einer fein-vernetzten einskaligen Simulation. In Tabelle 7.6 sind die über die Quasizeitschritte gemittelten Durchschnittsabweichungen der relevanten Größen für die verwendeten Vernetzungen angegeben.

Netzgrößen		Ø Abweichung [%]				
Makronetz	Mikronetz	$\det F^{eq}$	σ_{11}^{eq}	σ_{22}^{eq}	σ_{23}^{eq}	σ_{33}^{eq}
$3 \times 3 \times 3$	$4 \times 4 \times 4$	-0,28	-21,92	1,17	9,90	-36,16
$3 \times 3 \times 3$	$10 \times 10 \times 10$	-0,28	-21,92	1,17	9,90	-36,16
$6 \times 6 \times 6$	$4 \times 4 \times 4$	-0,06	-5,14	-0,04	2,26	-9,10
$6 \times 6 \times 6$	$6 \times 6 \times 6$	-0,06	-5,14	0,04	2,26	-9,10
$10 \times 10 \times 10$	$4 \times 4 \times 4$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabelle 7.6: Durchschnittliche Abweichungen bezüglich der einskaligen Referenzrechnung für das homogene Material.

In Abbildung 7.12 sind die von Null verschiedenen Spannungskomponenten und die Determinante des Deformationsgradienten für das Zweischichtenmaterial für alle verwendeten Netze dargestellt. Erneut ist für jede Größe der Verlauf der prozentualen Abweichungen bezüglich der einkaligen Referenzrechnung angegeben. Dabei ist zu beachten, daß die Ergebnisse der $3 \times 3 \times 3$ - $10 \times 10 \times 10$ -Rechnung nur bis zum achten Quasizeitschritt vorliegen.

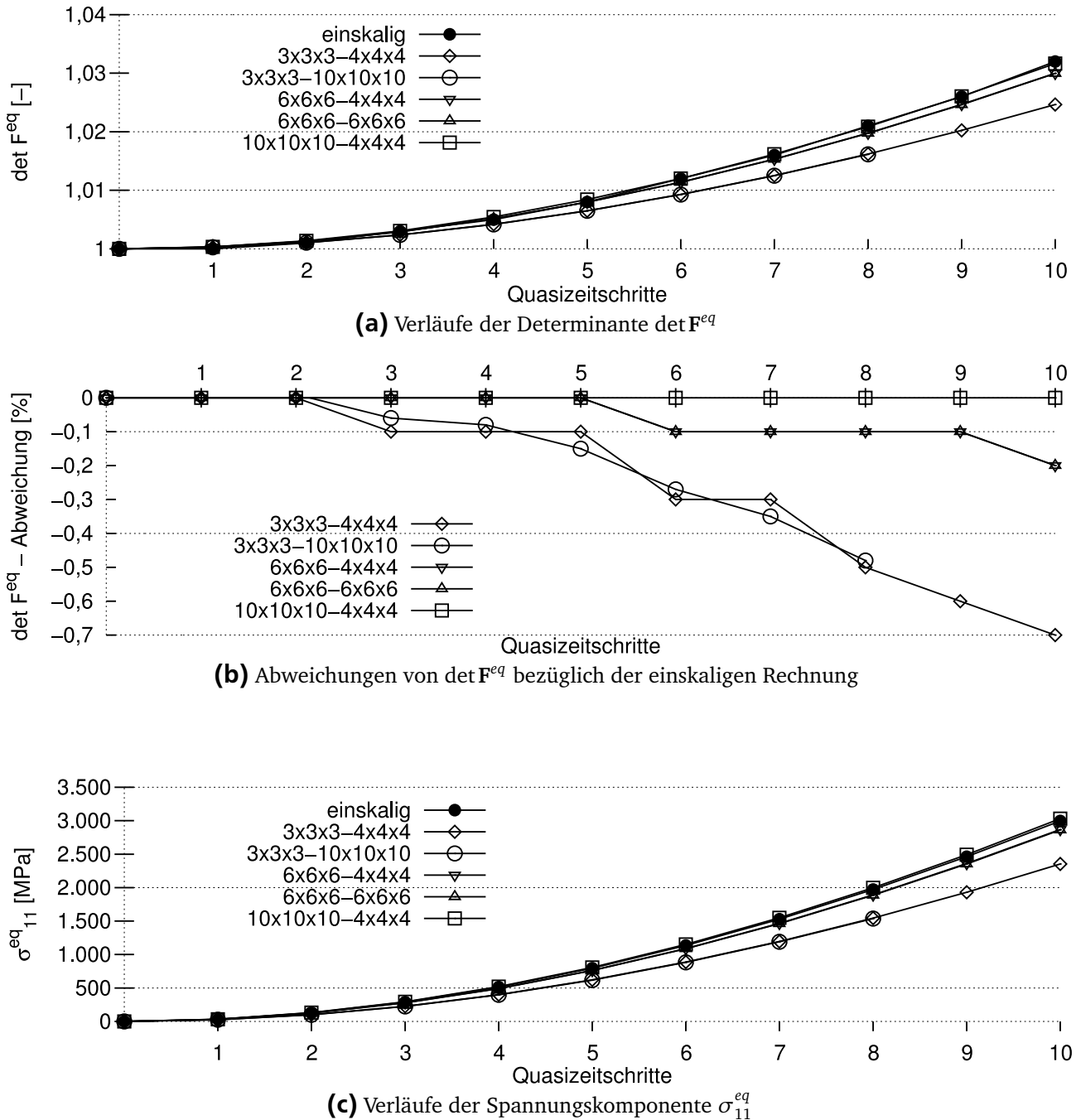
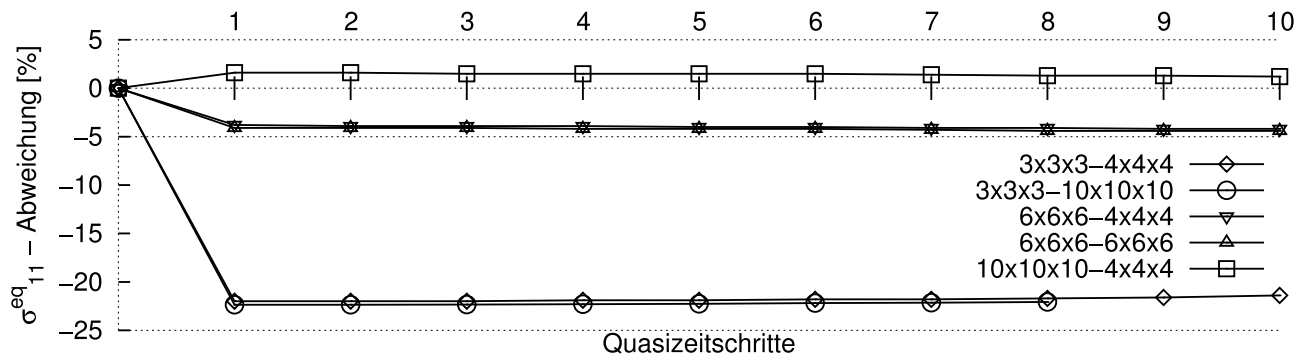
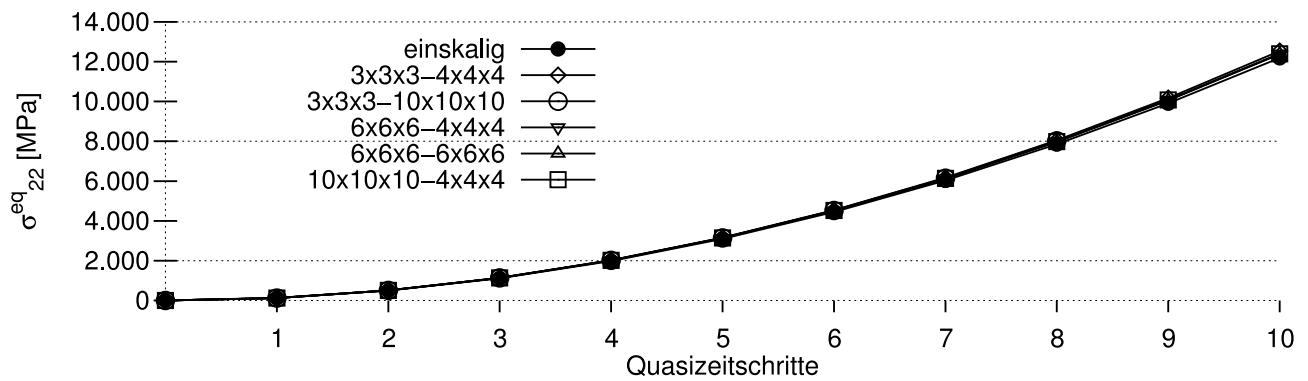


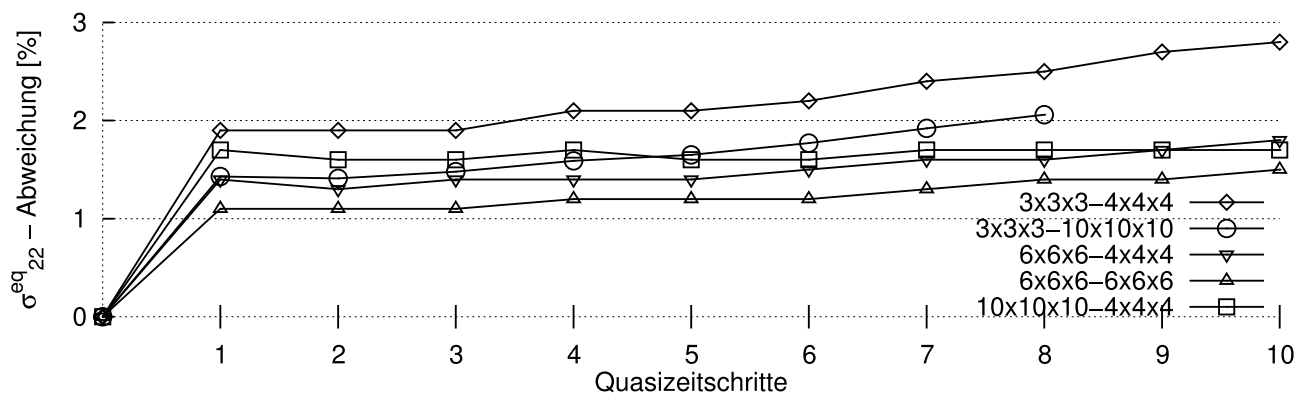
Abbildung 7.12: Verläufe und Abweichungen beim zweischichtigen Material



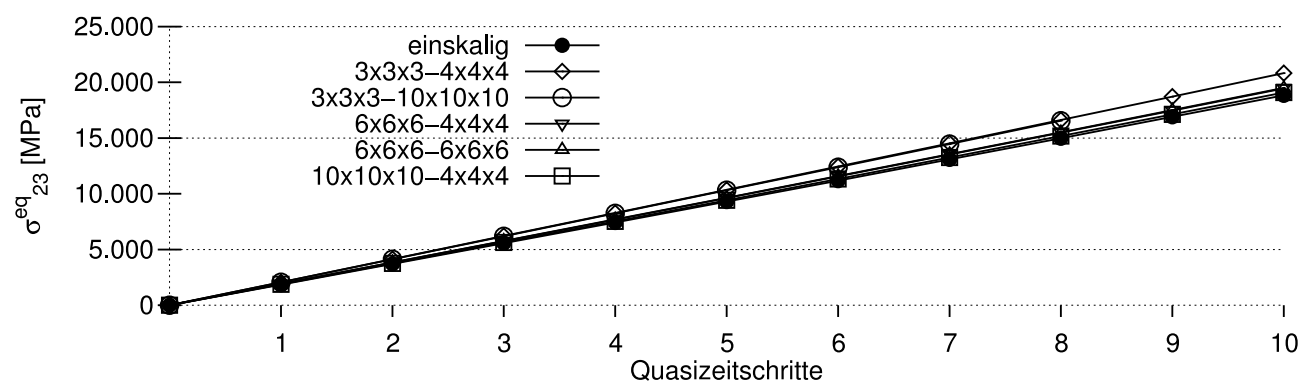
(d) Abweichungen von σ_{11}^{eq} bezüglich der einskaligen Rechnung



(e) Verläufe der Spannungskomponente σ_{22}^{eq}

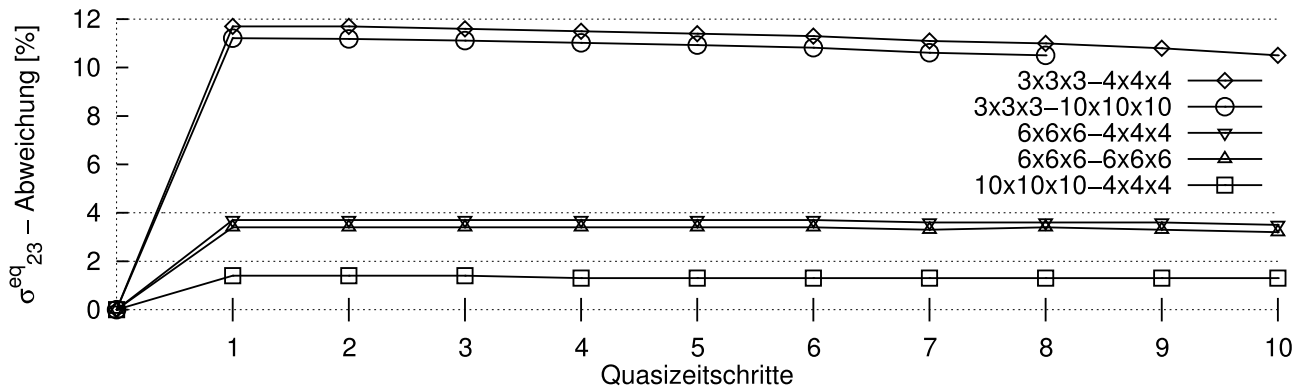


(f) Abweichungen von σ_{22}^{eq} bezüglich der einskaligen Rechnung

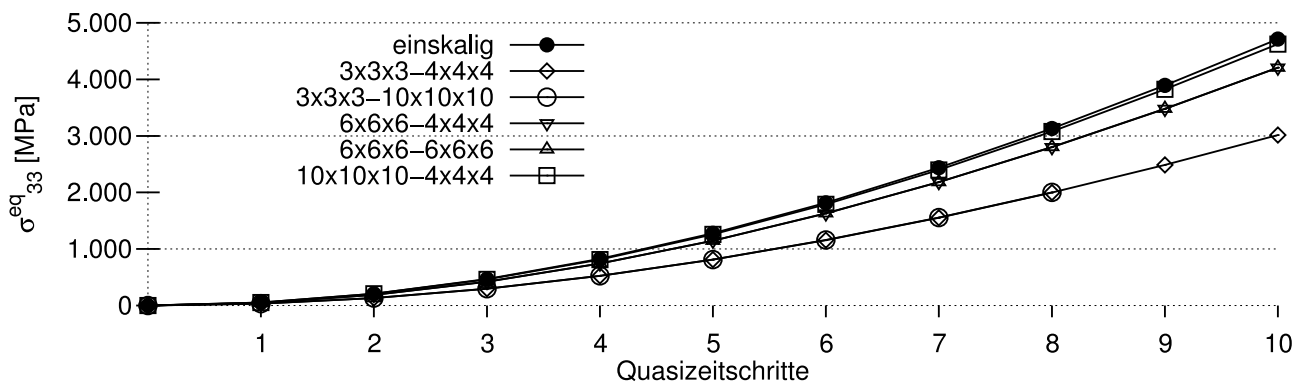


(g) Verläufe der Spannungskomponente σ_{23}^{eq}

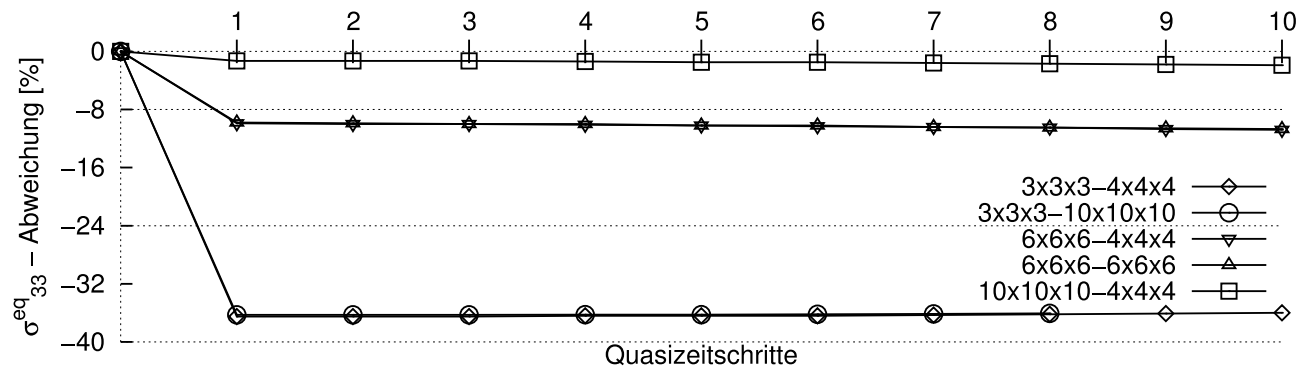
Abbildung 7.12: Verläufe und Abweichungen beim zweischichtigen Material



(h) Abweichungen von σ_{23}^{eq} bezüglich der einskaligen Rechnung



(i) Verläufe der Spannungskomponente σ_{33}^{eq}



(j) Abweichungen von σ_{33}^{eq} bezüglich der einskaligen Rechnung

Abbildung 7.12: Verläufe und Abweichungen beim zweischichtigen Material

Auch für das heterogene Zweischichtenmaterial scheint sich die Feinheit der mikroskopischen Einheitszelle kaum auf das makroskopische Ergebnis auszuwirken. Die beim makroskopischen $3 \times 3 \times 3$ - und beim makroskopischen $6 \times 6 \times 6$ -Netz feststellbaren Unterschiede zwischen den dort verwendeten mikroskopischen Vernetzungen sind jeweils nur marginal. Vielmehr übt erneut die makroskopische Diskretisierung den entscheidenden Einfluß auf das Gesamtergebnis aus. So können wir dort eine spürbare Verringerung der Abweichungen bei gleichzeitiger Erhöhung der Diskretisierungsfeinheit beobachten. Für eine Unterteilung des makroskopischen Einheitswürfels in $10 \times 10 \times 10$ Elemente liegen in allen betrachteten Größen durchschnittliche Abweichungen von weniger als 2 Prozent vor. Tabelle 7.7 verdeutlicht dies anhand der zeitlich gemittelten Abweichungen.

Netzgrößen		Ø Abweichung [%]				
Makronetz	Mikronetz	$\det F^{eq}$	σ_{11}^{eq}	σ_{22}^{eq}	σ_{23}^{eq}	σ_{33}^{eq}
$3 \times 3 \times 3$	$4 \times 4 \times 4$	-0,26	-21,79	2,25	11,27	-36,33
$3 \times 3 \times 3$	$10 \times 10 \times 10$	-0,17	-22,25	1,66	10,92	-36,22
$6 \times 6 \times 6$	$4 \times 4 \times 4$	-0,05	-4,02	1,50	3,65	-10,30
$6 \times 6 \times 6$	$6 \times 6 \times 6$	-0,05	-4,24	1,24	3,38	-10,22
$10 \times 10 \times 10$	$4 \times 4 \times 4$	0,01	1,44	1,65	1,33	-1,52

Tabelle 7.7: Durchschnittliche Abweichungen bezüglich der einskaligen Referenzrechnung für das Zweischichtenmaterial.

Abschließend stehen in Tabelle 7.8 die auf die einskalige Referenzrechnung bezogenen Laufzeitverhältnisse der durchgeführten homogenisierten Simulationen für das zweischichtige Material. Die $10 \times 10 \times 10$ - $4 \times 4 \times 4$ -Rechnung, welche die genauesten Ergebnisse geliefert hat, benötigt demnach ungefähr 30 mal soviel Zeit wie die einskalige Referenz. Die vorgestellte Homogenisierungsmethode ist jedoch für die Parallelisierung auf mehrere Rechenkerne sehr gut geeignet, da die mikroskopischen Probleme für unterschiedliche makroskopische Punkte jeweils unabhängig voneinander sind und dementsprechend auf einzelne CPUs verteilt werden können. Damit könnte der aufgezeigte Geschwindigkeitsnachteil behoben werden.

Makronetz	Mikronetz	Laufzeitverhältnis [-]
$10 \times 10 \times 2000$	-	1,0
$3 \times 3 \times 3$	$4 \times 4 \times 4$	0,92
$3 \times 3 \times 3$	$10 \times 10 \times 10$	> 400
$6 \times 6 \times 6$	$4 \times 4 \times 4$	7,47
$6 \times 6 \times 6$	$6 \times 6 \times 6$	117,29
$10 \times 10 \times 10$	$4 \times 4 \times 4$	31,98

Tabelle 7.8: Laufzeitverhältnisse beim Zweischichtenmaterial auf dem Referenzcomputer

7.6.2 Simulierter axialer Zugversuch in X_2 -Richtung

Den axialen Zug in X_2 -Richtung führen wir für das homogenisierte Zweischichtenmaterial mit dem im letzten Abschnitt ausgewählten makroskopischen $10 \times 10 \times 10$ - und mikroskopischen $4 \times 4 \times 4$ -Netz durch. Innerhalb von 10 Quasizeitschritten legen wir die Gesamtdeformation von 50 Prozent gleichmäßig auf, was einer Verlängerung des Einheitswürfels um 0,5 Längeneinheiten in X_2 -Richtung entspricht. Abbildung 7.13 verdeutlicht diesen Vorgang.

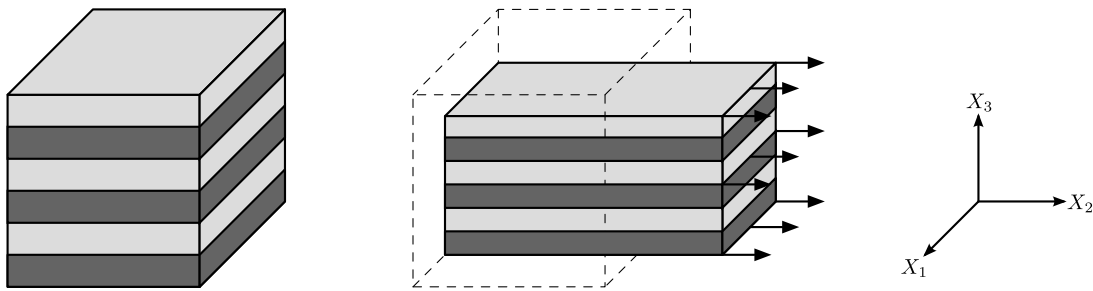


Abbildung 7.13: Axialer Zug in X_2 -Richtung

In der folgenden Abbildung 7.14 sind die wesentlichen, von Null verschiedenen Deformationsgrößen der einskaligen und der homogenisierten Simulation aufgetragen. Es ist daraus ersichtlich, daß sowohl die Determinante $\det \mathbf{F}^{eq}$ als auch die Normalspannung σ_{22}^{eq} von homogenisierter und einskaliger Rechnung im Rahmen der gezeigten Genauigkeit fast exakt miteinander übereinstimmen. Die über die Quasizeit gemittelten Abweichungen von der einskaligen Referenzrechnung sind für $\det \mathbf{F}^{eq}$ durch 0,01% und für σ_{22}^{eq} durch 0,21% gegeben.

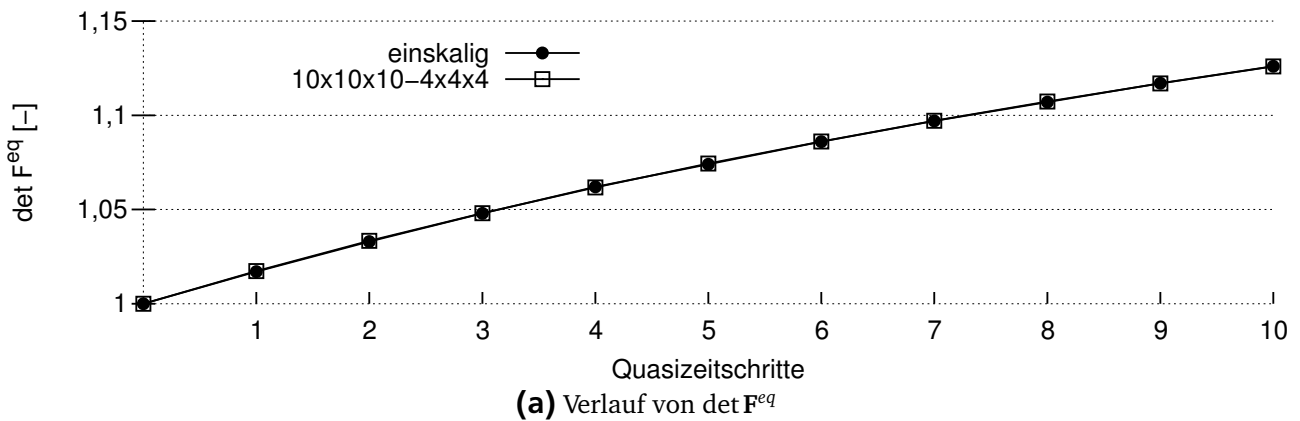


Abbildung 7.14: Relevante Verläufe

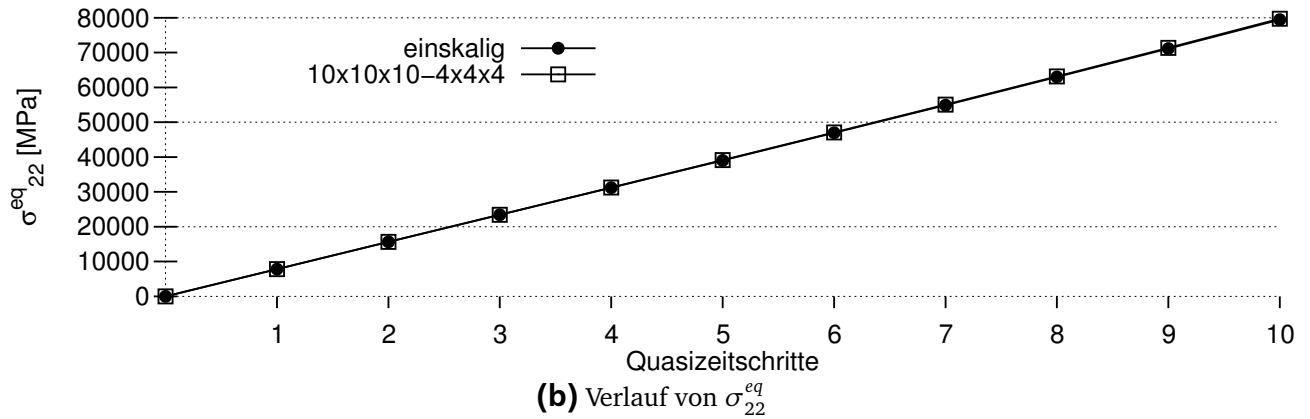


Abbildung 7.14: Relevante Verläufe

7.6.3 Simulierter axialer Zugversuch in X_3 -Richtung

Den axialen Zug in X_3 -Richtung führen wir für das homogenisierte Zweischichtenmaterial mit dem im vorletzten Abschnitt ausgewählten makroskopischen $10 \times 10 \times 10$ - und mikroskopischen $4 \times 4 \times 4$ -Netz durch. Innerhalb von 10 Quasizeitschritten legen wir die Gesamtdeformation von 50 Prozent gleichmäßig auf, was einer Verlängerung des Einheitswürfels um 0,5 Längeneinheiten in X_3 -Richtung entspricht. Abbildung 7.15 verdeutlicht diesen Vorgang.

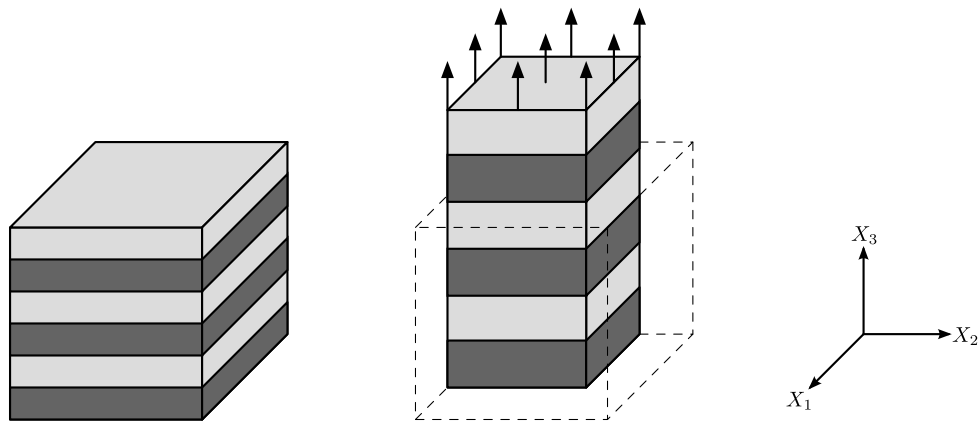
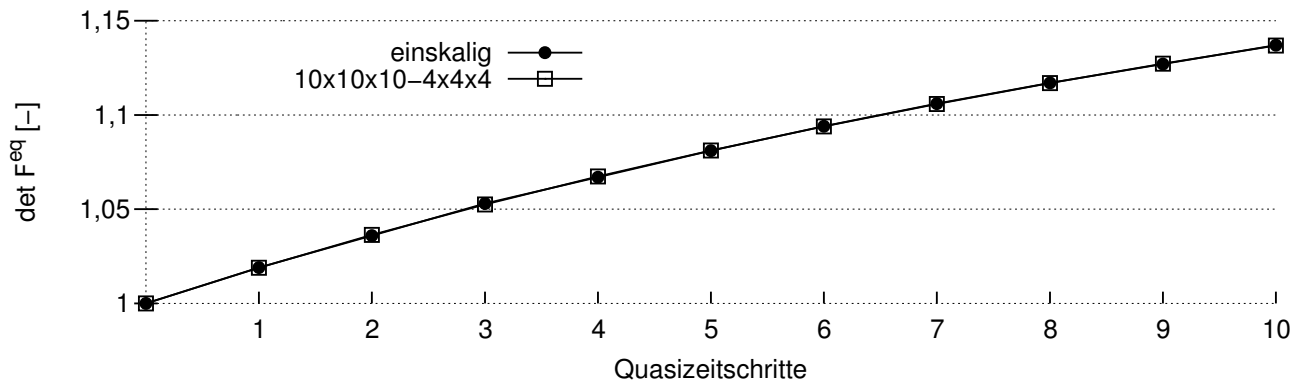
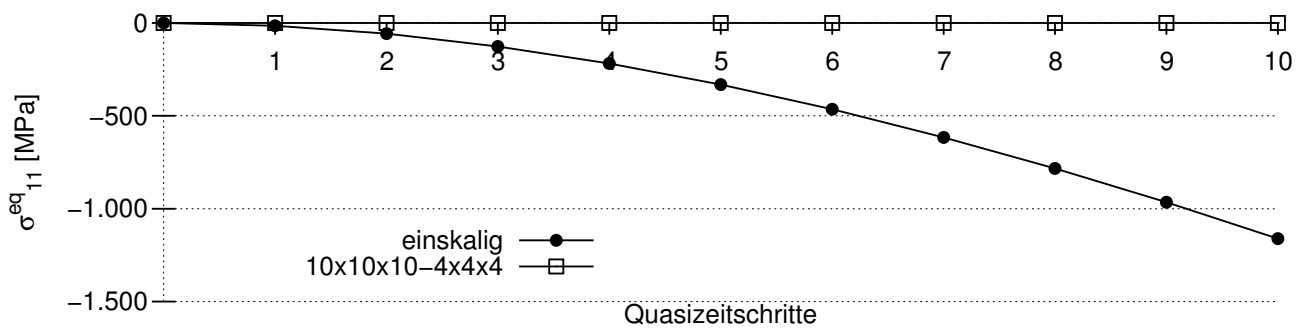


Abbildung 7.15: Axialer Zug in X_3 -Richtung

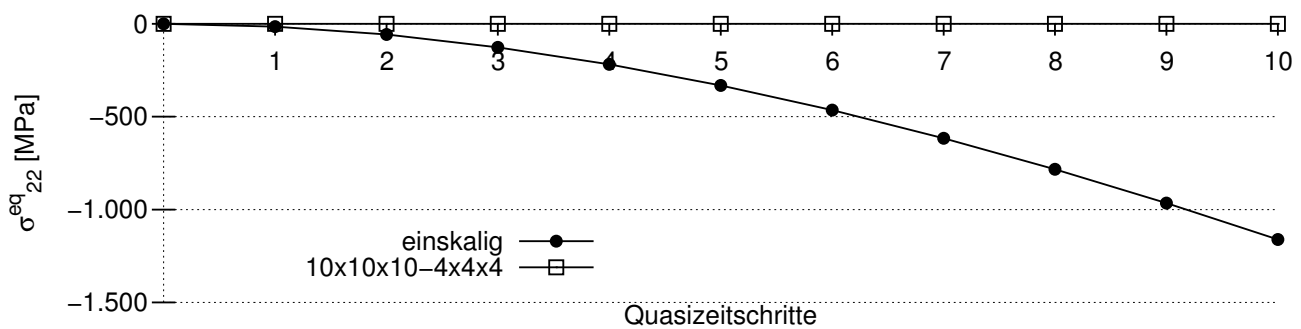
In der folgenden Abbildung 7.16 sind die wesentlichen, von Null verschiedenen Deformationsgrößen der einskaligen und der homogenisierten Simulation aufgetragen. Es ist daraus ersichtlich, daß sowohl die Determinante $\det \mathbf{F}^{eq}$ als auch die Normalspannung σ_{33}^{eq} von homogenisierter und einskaliger Rechnung im Rahmen der gezeigten Genauigkeit fast miteinander übereinstimmen. Hier liegt die zeitlich durchschnittliche Abweichung von der einskaligen Referenz für $\det \mathbf{F}^{eq}$ bei 0,00% und für σ_{33}^{eq} bei 0,18%. Die beiden Normalspannungen σ_{11}^{eq} und σ_{22}^{eq} hingegen, welche bei der homogenisierten Rechnung konstant Null sind, weisen bei der einskaligen Referenzrechnung das Verhalten einer nichtlinear ansteigenden Druckspannung



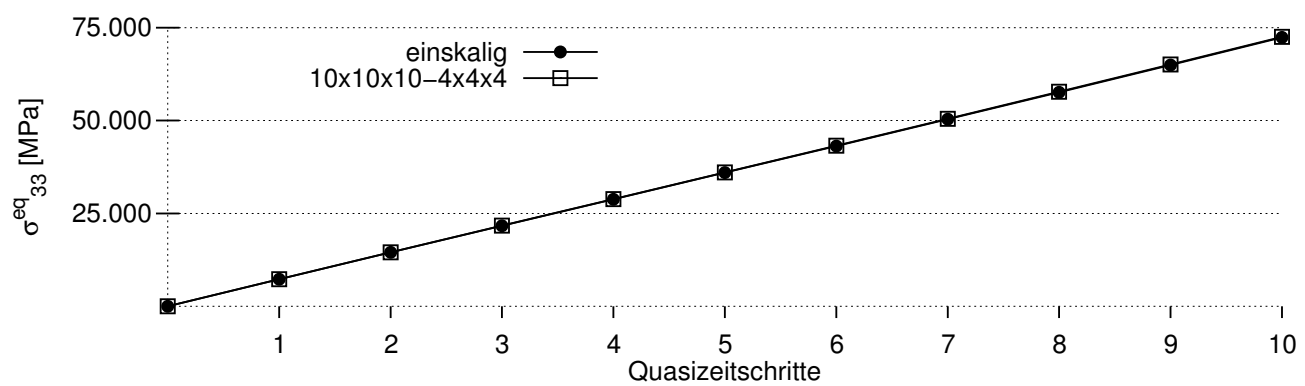
(a) Verlauf von $\det F^{eq}$



(b) Verlauf von σ_{11}^{eq}



(c) Verlauf von σ_{22}^{eq}



(d) Verlauf von σ_{33}^{eq}

Abbildung 7.16: Relevante Verläufe

auf. Dies kann den unterschiedlichen Querkontraktionszahlen des einskaligen Zweischichtenmaterials zugeschrieben werden, da durch die Annahme perfekt aufeinander haftender Schichten die freie Bewegung jeder einzelnen Schicht unterbunden wird. Im Gegensatz dazu ist das makroskopische Material des homogenisierten Problems tatsächlich homogen, weswegen die Normalenspannungen in den Einschnürrichtungen des Einheitswürfels gemäß der Theorie des axialen homogenen Zugs gleich Null sind.

Allgemein können demnach die Ergebnisse von fein-vernetzten einskaligen Rechnungen erklär-
bare Abweichungen von denjenigen ihrer homogenisierten Ersatzsimulationen aufzeigen. Diese Abweichungen sind der Idealisierung des homogenen makroskopischen Materials geschuldet.

7.6.4 Simulierter Torsionsversuch um die X_3 -Achse

Die Torsion um die durch die Mitte des Einheitswürfels gelegte X_3 -Achse führen wir für das homogenisierte Zweischichtenmaterial erneut mit dem makroskopischen $10 \times 10 \times 10$ - und mikroskopischen $4 \times 4 \times 4$ -Netz durch. Innerhalb von 10 Quasizeitschritten drehen wir die Oberseite der Würfels bei festgehaltenem Boden gleichmäßig um insgesamt $\alpha = 50^\circ$. Dabei können sich ebene Schichten in der X_1 - X_2 -Ebene verwölben. Abbildung 7.17 verdeutlicht den gesamten Vorgang. Im Gegensatz zu den vorigen Simulationen vergleichen wir diesmal nicht

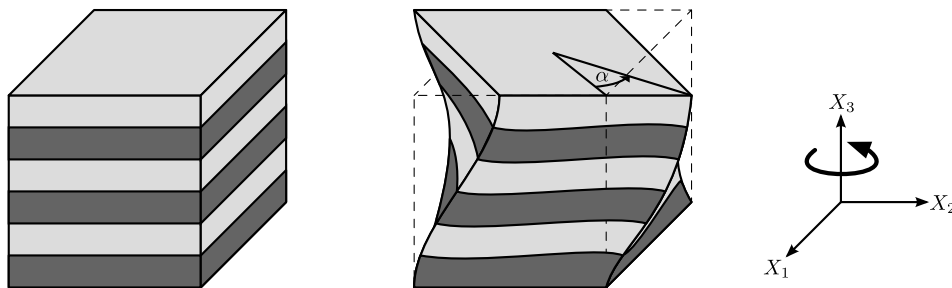


Abbildung 7.17: Torsion um die X_3 -Achse

die makroskopischen Volumenmittelwerte von σ und $\det \mathbf{F}$ miteinander, sondern wir betrachten die folgenden Größen:

- Torsionsmoment M_T um die X_3 -Achse
- Verteilung der in Zylinderkoordinaten dargestellten Spannungskomponente $\sigma_{\varphi z}$ in der X_1 - X_2 -Ebene für $X_3 = 0,5$
- Zeitlicher Verlauf von $\sigma_{\varphi z}$ an ausgewählten Stellen in derselben X_1 - X_2 -Ebene

Zur Berechnung des Torsionsmoments M_T verwenden wir die in [37] vorgeschlagene Formel

$$M_T = \int_A (X_1 \sigma_{23} - X_2 \sigma_{13}) \, dA, \quad (7.91)$$

wobei die Fläche A für den Schnitt der X_1 - X_2 -Ebene mit dem simulierten Einheitswürfel an der Stelle $X_3 = 0,5$ stehen soll. Der rechten Seite von (7.91) liegt die Annahme kleiner Deformationen zugrunde, weswegen sie für unsere Simulation nur noch grobe Näherungswerte liefern kann. Die Transformation in Zylinderkoordinaten ersetzt das Variablentripel (X_1, X_2, X_3) durch (r, φ, z) und die Indizes $_{123}$ – wie oben für die Spannung $\sigma_{\varphi z}$ bereits angedeutet ist – durch $r\varphi z$.

Abbildung 7.18 stellt den Verlauf des Torsionsmomentes M_T und die prozentuale Abweichung des homogenisierten Ergebnisses von der einkaligen Rechnung dar. Die maximale Abweichung tritt im zweiten Quasizeitschritt auf und beträgt 1%. In jedem anderen Quasizeitschritt liegt der jeweilige Wert leicht unter dieser Marke.

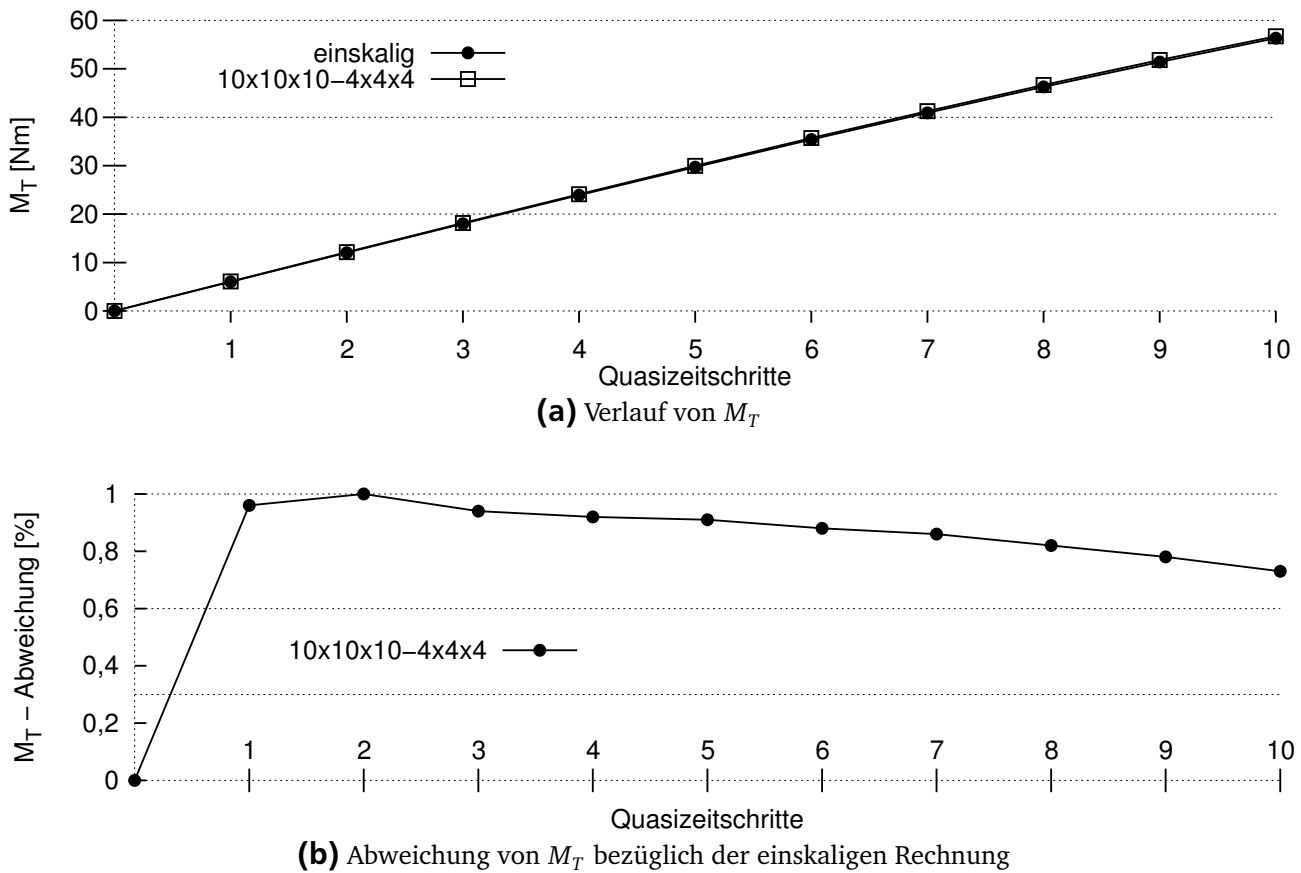


Abbildung 7.18: Das Torsionsmoment M_T in der X_1 - X_2 -Ebene an der Stelle $X_3 = 0,5$

In Abbildung 7.19 ist die Verteilung der Spannungskomponente $\sigma_{\varphi z}$ in der X_1 - X_2 -Ebene an der Stelle $X_3 = 0,5$ im 5. und im 10. Quasizeitschritt elementweise grafisch dargestellt. Die beiden linken Diagramme zeigen die absoluten Werte der einkaligen und der homogenisierten Rechnung. Man erkennt deutlich den Spannungsanstieg in radialer Richtung. Die größten Spannungen treten an den Seitenflächen auf, die Verteilung ist insgesamt symmetrisch bezüglich Drehungen um 90 Grad. Das rechte Diagramm gibt Auskunft über die prozentuale Abweichung des homogenisierten Modells von der einkaligen Referenz. Demnach liegen diese Abweichungen im 5. Quasizeitschritt in keinem Element über der 1,5%- und im 10. Quasizeitschritt in keinem Element über der 1,2%-Marke.

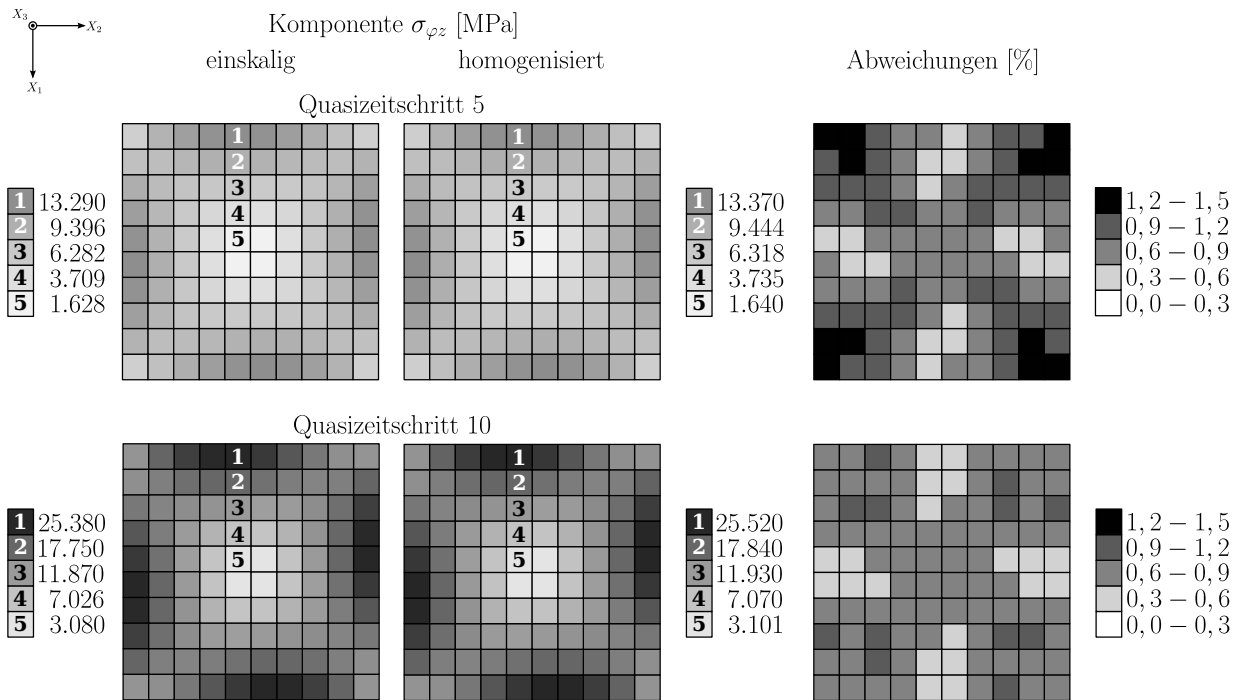


Abbildung 7.19: Verteilung von $\sigma_{\varphi z}$ in der X_1 - X_2 -Ebene bei $X_3 = 0,5$ für die Quasizeitschritte 5 und 10

Die in Abbildung 7.19 markierten fünf Elemente dienen in Abbildung 7.20 als Bezugspunkte für den zeitlichen Verlauf der Spannungskomponente $\sigma_{\varphi z}$. Zum einen wird nochmals deutlich, daß die Spannungen mit zunehmender Entfernung des betrachteten Elements von der Torsionsachse stets größer werden. Zum anderen erkennen wir, daß die Ergebnisse von einskaliger und homogenisierter Rechnung für alle Quasizeitschritte kaum voneinander abweichen. Genauer beträgt die maximale Abweichung 0,78%. Sie tritt im 1. Quasizeitschritt im Element Nummer 5 auf.

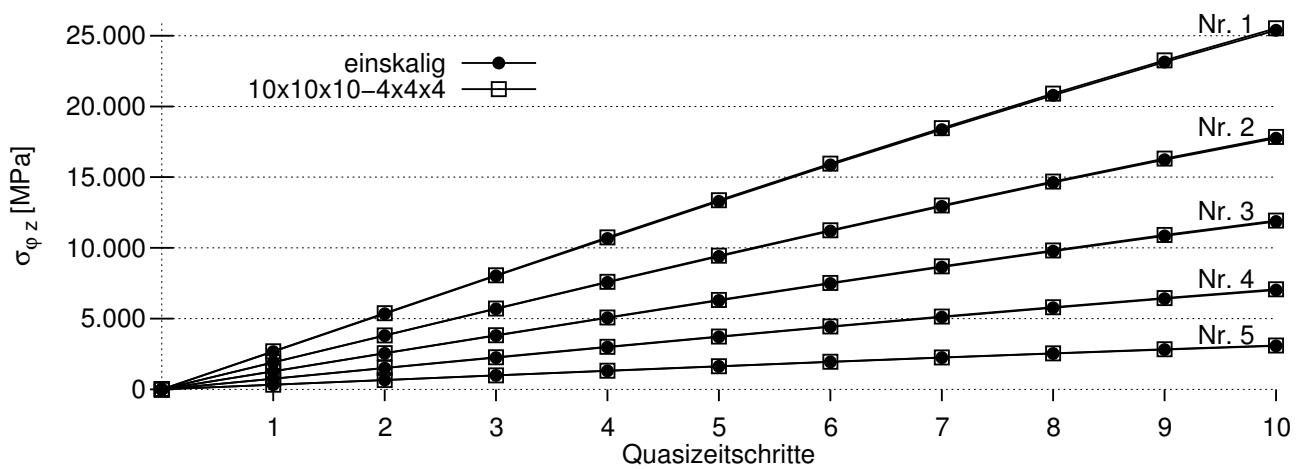


Abbildung 7.20: Verlauf von $\sigma_{\varphi z}$ der Elemente 1 bis 5

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist mithilfe der mathematischen Theorie der Zweiskalenkonvergenz ein Verfahren zur Homogenisierung von nichtlinearen hyperelastischen Materialien, welche durch eine feine periodische Mikrostruktur charakterisiert sind, vorgestellt worden. Die Periodizität der Materialstruktur wurde dabei durch eine Einheitszelle modelliert. Die Einführung eines Skalierungsparameters ε , welcher den Größenunterschied von charakteristischer makroskopischer und charakteristischer mikroskopischer Länge widerspiegeln soll, diente als Grundlage einer mathematischen Formulierung des mechanischen Problems. Alle Gleichungen der nichtlinearen Hyperelastizität wurden mit diesem Parameter in Verbindung gebracht.

Bei der Anwendung der Zweiskalenkonvergenz wurde der Skalierungsparameter ε gegen Null geschickt, was physikalisch einer unendlich fein werdenden Mikrostruktur des Materials entspricht. Mathematisch sind dadurch Gleichungen entstanden, welche sowohl von einer mikroskopischen als auch von einer makroskopischen Variable abhängig sind. Mithilfe der Variationsrechnung konnten diese Gleichungen in ein mikroskopisches und ein makroskopisches Problem separiert werden, welche zusammengekommen das homogenisierte Problem darstellen. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf das Konvergenzverhalten der hyperelastischen Spannungspotentialbeziehung gelegt. Aufgrund der dort auftretenden Nichtlinearitäten ist das Gewinnen eines konkreten Zweiskalengrenzwertes im allgemeinen zunächst nicht möglich. Aus diesem Grund wurde für das speziell untersuchte Neo-Hooke-Gesetz ein asymptotischer Ansatz für das unbekannte Verschiebungsfeld gewählt. Mit diesem Ansatz konnte ein geeigneter Zweiskalengrenzwert der betrachteten Spannungs-Dehnungs-Beziehung ermittelt werden.

Das für klassische Hyperelastizität erfolgreich angewandte Konvergenz- und Skalentrennungsprinzip wurde auf Materialien mit einer periodischen linearen isotropen mikropolaren elastischen Mikrostruktur übertragen. Auch hier konnten alle Gleichungen des einskaligen Problems in einen mikroskopischen und einen makroskopischen Teil überführt werden. Ein asymptotischer Ansatz war in diesem Fall aufgrund der rein linearen Struktur der Ausgangsgleichungen nicht notwendig.

Die Güte der vorgestellten Homogenisierungsmethode wurde für die nichtlineare Hyperelastizität anhand von Finite-Elemente-Simulationen für die Belastungsarten Scherung, Zug und Torsion numerisch überprüft. Dabei wurde das mikroskopische Problem aufgrund seiner ihm innewohnenden funktionalen Nebenbedingung mit einem gestörten Lagrange-Verfahren gelöst. Auf der makroskopischen Ebene wurde eine geeignete Formulierung der makroskopischen Tangentenmatrix untersucht, wobei sich die Volumenmittelung der mikroskopischen Tangente als schnellste Variante herausgestellt hat. Für die numerischen Simulationen wurde ein zweischichtiges Material modelliert, dessen beiden Schichten sich gleichmäßig in X_3 -Richtung abwechseln. Der Skalenunterschied zwischen mikroskopischer und makroskopischer Ebene betrug dabei $\varepsilon = 10^{-3}$. Jede Rechnung wurde sowohl klassisch einskalig als auch homogenisiert durchgeführt. Anschließend wurden die Ergebnisse anhand von geeigneten makroskopischen Volumenmittelungen miteinander verglichen. Dabei konnte das Fazit gezogen werden, daß das homogenisierte Problem das einskalige Ausgangsproblem für das verwendete Materialmodell und die simulierten Belastungsarten sehr gut beschreiben kann.

8.2 Ausblick

Aus technischer Sicht kann die Rechengeschwindigkeit des homogenisierten Verfahrens durch die Verwendung paralleler Programmierung für mehrere CPUs drastisch erhöht werden. Dies liegt an der Tatsache, daß die mikroskopischen Probleme innerhalb einer makroskopischen Iteration voneinander unabhängig sind und dadurch parallel gelöst werden können. Hier ist viel Potential für Geschwindigkeitsoptimierung vorhanden.

Aus theoretischer Sicht kann das gezeigte zweiskalige Konvergenzverfahren unter Verwendung des vorgestellten asymptotischen Ansatzes auf hyperelastische Materialmodelle mit höheren Nichtlinearitäten angewendet werden. Hierbei ist vor allem darauf zu achten, daß die auftretenden Funktionen passend zu den zulässigen Testfunktionen hinzugezählt werden können. Die Untersuchung (visko-)plastischen Materialverhaltens setzt allerdings größere Anforderungen an die mathematische Theorie: Um das vorgestellte Verfahren anwenden zu können, müssen vorher Zweiskalenkonvergenzaussagen über Differentialoperatoren getroffen werden, welche Ableitungen nach inneren Variablen oder nach der Zeit beinhalten. Ähnliches gilt für höhere Gradiententheorien wie der Gradientenelastizität, da hier im allgemeinen die zweiskalige Konvergenz höherer Ableitungen betrachtet werden muß.



9 Akademischer Lebenslauf des Autors

Persönliches

Name: Matthias Sanden
Geburtsdatum: 31. Juli 1984
Geburtsort: Offenbach am Main

Werdegang

09/2012 – heute **TU Darmstadt**, Studienbereich Mechanik
Mitglied der Studienbereichskommission

09/2010 – heute **TU Darmstadt**, Fachbereich Bauingenieurwesen und Geodäsie
Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe Kontinuumsmechanik

09/2010 – 08/2013 **TU Darmstadt**, Fachbereich Bauingenieurwesen und Geodäsie
Promotion in der Arbeitsgruppe Kontinuumsmechanik
Doktorvater: Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis
Thema: *Mathematische Homogenisierung in der Kontinuumsmechanik*
Abschluß: Dr. rer. nat.

04/2005 – 04/2010 **TU Darmstadt**, Studium der Mathematik
Nebenfächer: Technische Mechanik und Kontinuumsmechanik
Thema der Diplomarbeit: *Rotationseffekte in der Kristallplastizität*
Abschluß: Dipl.-Math.

07/2004 – 03/2005 **Bundeswehr**, Wehrdienst in der Luftwaffe

08/1995 – 06/2004 **Leibnizgymnasium**, Offenbach am Main
Leistungskurse: Deutsch und Mathematik
Abschluß: Abitur

Vorträge

05/2013 10th HSTAM Congress on Mechanics in Chania, Griechenland
Vortrag: *Homogenization by two-scale convergence for nonlinear periodic hyperelastic materials*

Darmstadt, 30. August 2013

Literaturverzeichnis

- [1] ALBER, H.: *Materials with Memory*. Lecture Notes in Mathematics, Nr. 1682, Springer-Verlag Berlin, Deutschland. ISBN: 3-540-64066-5. 1998.
- [2] ALBER, H., CHELMINSKI, K.: *Quasistatic problems in viscoplasticity theory*. Vordruck Nr. 2190, Technische Universität Darmstadt, Deutschland. 2002.
- [3] ALBER, H.: *Justification of homogenized models for viscoplastic bodies with microstructure*. In *Deformation and Failure in Metallic Materials*, 295-319, Springer-Verlag Berlin, Deutschland. ISBN: 978-3-540-00848-4. 2003.
- [4] ALLAIRE, G.: *Homogenization and two-scale convergence*. Journal on Mathematical Analysis, Volume 26, Issue 6, 1482-1518. 1992.
- [5] ALLAIRE, G.: *Mathematical Approaches and Methods*. In *Homogenization and Porous Media*, 225-250, Springer-Verlag, New York, USA. ISBN: 978-0-387-94786-0. 1996.
- [6] BAKHVALOV, N., PANASENKO, G.: *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, Niederlande. ISBN: 0-7923-0049-1. 1989.
- [7] BALL, J.: *Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 63, 337-403. 1977.
- [8] BALZANI, D.: *Some basic ideas for the reconstruction of statistically similar microstructures for multiscale simulations*. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 8, Issue 1, 10533-10534. 2008.
- [9] BENSOUSSAN, A.: *Asymptotic analysis for periodic structures*. Studies in Mathematics and its Applications, Volume 5, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Niederlande. ISBN: 0-444-85172-0. 1978.
- [10] BENZI, M., GOLUB, G. H., LIESEN, J.: *Numerical solution of saddle point problems*. Acta Numerica, Volume 14, 1-137. 2005.
- [11] BERCOVIER, M.: *Perturbation Of Mixed Variational Problems. Application To Mixed Finite Element Methods*. Numerical Analysis, Volume 12, Number 3, 211-236. 1978.
- [12] BONET, J., BURTON, A. J.: *A simple orthotropic, transeversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 162, 151-164. 1998.
- [13] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland. ISBN: 978-3-540-72449-0. 2007.

-
- [14] BRAIDES, A.: *Gamma-convergence for Beginners*. Oxford University Press Inc., New York, USA. ISBN: 0-19-850784-4. 2002.
- [15] BREIT, D.: *Grundlagen der Variationsrechnung*. Vorlesungsskriptum, Fachbereich Mathematik, Universität des Saarlands, Deutschland. 2009.
- [16] BRÖSE, C.: *Rotationseffekte in der Kristallplastizität*. Dissertation. Forschungsbericht Nr. 19, Fachbereich Bauingenieurwesen, Studienbereich Mechanik, TU Darmstadt, Deutschland. ISBN: 978-3-935-86819-8. 2007.
- [17] CHEN, J. S., HAN, W., WU, C. T., DUAN, W.: *On the perturbed Lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 142, 335-351. 1997.
- [18] CHUNG, P. W., TAMMA, K. K., NAMBURU, R. R.: *Asymptotic expansion homogenization for heterogeneous media: computational issues and applications*. Composites: Part A, Volume 32, 1291-1301. 2001.
- [19] CIARLET, P. G.: *Mathematical Elasticity - Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications, Volume 20, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Niederlande. ISBN: 0-444-70259-8. 1988.
- [20] GIORANESCU, D., DONATO, P.: *An Introduction to Homogenization*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Nr. 17, Oxford University Press Inc., New York, USA. ISBN: 0-19-856554-2. 1999.
- [21] COSSERAT, E., COSSERAT, F.: *Théorie des Corps Déformables*. Herman et fils, Paris, Frankreich. 1909.
- [22] DAYA REDDY, B.: *Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Texts in Applied Mathematics, Nr. 27, Springer Verlag, New York, USA. ISBN: 0-387-98307-4. 1998.
- [23] DACOROGNA, B.: *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals*. Springer Verlag, Berlin, Deutschland. ISBN: 3-540-11488-2. 1982.
- [24] DUBBEL: *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer Verlag, Berlin, Deutschland. ISBN: 3-540-67777-1. 2001.
- [25] ELMER: *ElmerGrid Manual, ElmerParam Manual, ElmerSolver Manual und Elmer Tutorials*. CSC - IT Center for Science Ltd., Espoo, Finnland. 2010.
- [26] ELSÄSSER, R.: *Bruchmechanische Untersuchungen für elastische mikropolare Kontinua*. Dissertation, Nr. FZKA 6709, Forschungszentrum Karlsruhe - Technik und Umwelt, Deutschland. 2002.
- [27] ERINGEN, A. C.: *Microcontinuum Field Theories - I. Foundations and Solids*. Springer Verlag, New York, USA. ISBN: 0-387-98620-0. 1999.

-
- [28] ERINGEN, A. C.: *Microcontinuum Field Theories - II. Fluent Media*. Springer Verlag, New York, USA. ISBN: 0-387-98969-2. 2001.
- [29] ESHELBY, J. D.: *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. Proceedings of the Royal Society London A, Nr. 241, 376-396. 1957.
- [30] ESHELBY, J. D.: *Elastic inclusions and inhomogeneities*. Prog. Solid Mechanics, Nr. 2, 89-140, University of Sheffield. 1961.
- [31] FELIPPA, C. A.: *Parametrized multifield variational principles in elasticity: I. Mixed functionals*. Communications in Applied Numerical Methods, Volume 5, 79-88. 1989.
- [32] FONSECA, I., KRÖMER, S.: *Multiple Integrals under Differential Constraints: Two-Scale Convergence and Homogenization*. Center for Nonlinear Analysis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA. 2009.
- [33] FRANCU, J.: *Homogenization of linear elasticity equations*. Applications of Mathematics, Volume 27, Issue 2, 96-117. 1982.
- [34] FRÉNOT, E.: *Two-Scale Convergence*. Laboratoire en sciences et techniques de l'information, de la communication et de la connaissance, Frankreich. 2011.
- [35] GRAMMENOU DIS, P.: *Mikropolare Plastizität*. Dissertation, Fachbereich Mechanik, TU Darmstadt, Deutschland. 2003.
- [36] GRAMMENOU DIS, P., TSAKMAKIS, Ch.: *Finite element implementation of large deformation micropolar plasticity exhibiting isotropic and kinematic hardening effects*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 62, 1691-1720. 2005.
- [37] GREVE, R.: *Kontinuumsmechanik*. Springer Verlag, Berlin, Deutschland. ISBN: 3-540-00760-1. 2003.
- [38] HASHIN, Z., SHTRIKMAN, S.: *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 10, 343-352. 1962.
- [39] HASHIN, Z., SHTRIKMAN, S.: *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 11, 127-140. 1963.
- [40] HILL, R.: *The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate*. Proceedings of the Physical Society. Section A, Volume 65, Number 5, 349-354. 1951.
- [41] HILL, R.: *Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 13, 89-101. 1965.
- [42] HILL, R.: *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 15, 79-95. 1967.

-
- [43] HILL, R., RICE, J. R.: *Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 20, 401-413. 1967.
- [44] HOFMANN, W.: *Funktionalanalysis mit Anwendungen*. Vorlesungsskript, Universität Hamburg, Deutschland. 2005.
- [45] KOUZNETSOVA, V., BREKELMANS, W. A. M., BAAIJENS, F. P. T.: *An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials*. Computational Mechanics, Volume 27, 37-48. 2001.
- [46] LEBENSOHN, R. A., CANOVA, G. R.: *A self-consistent approach for modelling texture development of two-phase polycrystals: application to titanium alloys*. Acta Materialia, Volume 45, Issue 9, 3687-3694. 1997.
- [47] LEBENSOHN, R. A., TURNER, P. A., SIGNORELLI, J. W., CANOVA, G. R., TOME, C. N.: *Calculation of intergranular stresses based on a large-strain viscoplastic self-consistent polycrystal model*. Modelling and Simulation in Material Science and Engineering, Volume 6, 447-465. 1998.
- [48] LEBENSOHN, R. A., LIU, Y., PONTE CASTANEDA, P.: *On the accuracy of the self-consistent approximation for polycrystals: comparison with full-field numerical simulations*. Acta Materialia, Volume 52, 5347-5361. 2004.
- [49] LEBENSOHN, R. A., TOME, C. N., PONTE CASTANEDA, P.: *Self-consistent modelling of the mechanical behaviour of viscoplastic polycrystals incorporating intragranular field fluctuations*. Philosophical Magazine, Volume 87, Issue 28, 4287-4322. 2007.
- [50] LI, S., SAUER, R., WANG, G.: *A circular inclusion in a finite domain I. The Dirichlet-Eshelby problem*. Acta Mechanica, Volume 179, 67-90. 2005.
- [51] LI, S.: *The Eshelby Tensors in a Finite Spherical Domain – Part I: Theoretical Formulations*. Journal of Applied Mechanics, Volume 74, 770-783. 2007.
- [52] LI, S.: *The Eshelby Tensors in a Finite Spherical Domain – Part II: Applications to Homogenization*. Journal of Applied Mechanics, Volume 74, 784-797. 2007.
- [53] LUKKASSEN, D. et al.: *Two-scale convergence*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 2, Issue 1, 35-86. 2002.
- [54] MATSUI, K., TERADA, K., YUGE, K.: *Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures*. Computers and Structures, Volume 82, 593-606. 2004.
- [55] MERCIER, S., MOLINARI, A.: *Homogenization of elastic-viscoplastic heterogeneous materials: Self-consistent and Mori-Tanaka schemes*. International Journal of Plasticity, Volume 25, 1024-1048. 2009.
- [56] MIEHE, C.: *Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 134, 223-240. 1996.

-
- [57] MIEHE, C., SCHRÖDER, J., SCHOTTE, J.: *Computational homogenization analysis in finite plasticity – Simulation of texture development in polycrystalline materials*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 171, 387-418. 1999.
- [58] MIEHE, C., SCHOTTE, J., SCHRÖDER, J.: *Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains*. Computational Materials Science, Volume 16, 372-382. 1999.
- [59] MIEHE, C.: *Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 192, 559-591. 2003.
- [60] MIEHE, C., DETTMAR, J.: *A framework for micro-macro transitions in periodic particle aggregates of granular materials*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 193, 225-256. 2004.
- [61] MIEHE, C., DETTMAR, J., ZÄH, D.: *Homogenization and two-scale simulations of granular materials for different microstructural constraints*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 83, 1206-1236. 2010.
- [62] MOLINARI, A., EL HOUDAIGUI, F., TOTH, L. S.: *Validation of the tangent formulation for the solution of the non-linear Eshelby inclusion problem*. International Journal of Plasticity, Volume 20, 291-307. 2004.
- [63] MÜLLER, S.: *Homogenization of Nonconvex Integral Functionals and Cellular Elastic Materials*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 99, Issue 3, 189-212. 1998.
- [64] NEMAT-NASSER, S.: *Averaging theorems in finite deformation plasticity*. Mechanics of Materials, Number 31, 493-523. 1999.
- [65] NESENEENKO, S.: *Homogenization of Viscoplastic Models of Monotone Type with Positive Semi-Definite Free Energy*. Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt, Deutschland. 2010.
- [66] NGUETSENG, G.: *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*. Journal on Mathematical Analysis, Volume 20, Issue 3, 608-623. 1989.
- [67] ODEN, J. T., KIKUCHI, N.: *Finite element methods for constrained problems in elasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 18, 701-725. 1982.
- [68] OLEINIK, D. A., SHAMAEV, A. S., YOSIFIAN, G. A.: *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. Studies in Mathematics and its Applications, Volume 26, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Niederlande. ISBN: 0-444-88441-6. 1992.
- [69] PARISCH H.: *A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 28, 1803-1812. 1989.

-
- [70] PINDER M., KHATAM H., DRAGO A. S., BANSAL Y.: *Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches*. Composites: Part B, Volume 40, 349-378. 2009.
- [71] PREUSS, W., WENISCH, G.: *Numerische Mathematik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, Deutschland. ISBN: 3-446-21375-9. 2001.
- [72] QU, J., CHERKAoui, M.: *Fundamentals of Micromechanics of Solids*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA. ISBN: 978-0-471-46451-8. 2006.
- [73] REUSS, A.: *Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 9, Heft 1, 49-58. 1929.
- [74] RŮŽIČKA, M.: *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland. ISBN: 3-540-20066-5. 2004.
- [75] SAIKI, I., TERADA, K., IKEDA, K., HORI, M.: *Appropriate number of unit cells in a representative volume element for micro-structural bifurcation encountered in a multi-scale modeling*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 191, 2561-2585. 2002.
- [76] SCHRÖDER, J., BALZANI, D., BRANDS, D.: *Approximation of random microstructures by periodic statistically similar representative volume elements based on lineal-path functions*. Archive of Applied Mechanics, Volume 81, Issue 7, 975-997. 2011.
- [77] SVANSTEDT, N., WELLANDER, N.: *A note on two-scale limits of differential operators*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Preprint. 2001.
- [78] TEMIZER, I., WRIGGERS, P.: *On the computation of the macroscopic tangent for multiscale volumetric homogenization problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 198, 495-510. 2008.
- [79] TERADA, K. et al.: *Kinematically Correct Formulation for Two-scale Finite Deformation Problems*. Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science, 53-62. 2000.
- [80] TERADA, K., KIKUCHI, N.: *A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 190, 5427-5464. 2001.
- [81] TERADA, K. et al.: *Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 192, 3531-3563. 2003.
- [82] VISINTIN, A.: *Two-scale convergence of some integral functionals*. Calculus of Variations, Springer-Verlag online. 2007.
- [83] VOIGT, W.: *Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper*. Wiedemanns Annalen 38, Band 274, 573-587. 1889.

-
- [84] WANG, G., LI, S., SAUER, R.: *A circular inclusion in a finite domain II. The Neumann-Eshelby problem*. Acta Mechanica, Volume 179, 91-110. 2005.
- [85] WATANABE, I., TERADA, K., AKIYAMA, M.: *Two-scale analysis for deformation-induced anisotropy of polycrystalline metals*. Computational Materials Science, Volume 32, 240-250. 2005.
- [86] WATANABE, I., TERADA, K.: *A method of predicting macroscopic yield strength of polycrystalline metals subjected to plastic forming by micro-macro de-coupling scheme*. International Journal of Mechanical Sciences, Volume 52, 343-355. 2010.
- [87] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland. ISBN: 3-540-67747-X. 2001.
- [88] ZHODI, T. I., WRIGGERS, P.: *An Introduction to Computational Micromechanics*. Springer-Verlag Berlin, Deutschland. ISBN: 978-3-540-77482-2. 2008.
- [89] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann, Oxford, Großbritannien. ISBN: 0-7506-5049-4. 2000.
- [90] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method - Volume 2: Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, Großbritannien. ISBN: 0-7506-5055-9. 2000.